LEZIONE 26 INTRODUZIONE ALL'ELETTROSTATICA

Prof Paolo Addis
51'33

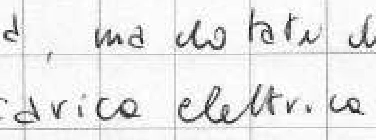
INIZIO FISICA II

Forza di Coulomb
Legge fondamentale dell'elettrostatica
Campo elettrostatico
Flusso del campo elettrostatico, potenziale elettrico

Studio di fenomeni elettrici non dipendenti dal tempo:
fenomeni elettrostatici, a differenza dei fenomeni elettrodinamici.

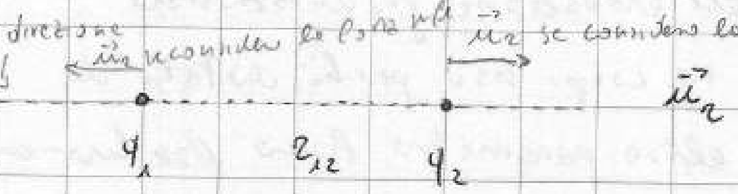
La materia è composta da particelle con una massa
che interagiscono secondo leggi gravitazionali.
Nel '700 ci si accorge che esiste un'altra classe di fenomeni
che non sono riconducibili all'attrazione gravitazionale.
Fenomeni che si instaurano tra corpi non perché dotati di
massa, ma dotati di un altro parametro fisico fondamentale,
la carica elettrica.

La forza di Coulomb è una forza tra
cariche elettriche



q_1 e q_2 sono due cariche elettriche poste ad una distanza r_{12};
in presenza della carica q_2, la carica q_1 è soggetta ad una certa forza
di tipo elettrico e, viceversa, la carica q_2 in presenza della
carica q_1 è soggetta ad una certa forza di tipo elettrico.
Queste due forze sono uguali e di segno opposto. La
forza varia con l'inverso del quadrato della distanza r_{12}

tra le due forze. Questa è una variazione e modulo.
La direzione della forza elettrica è quella lungo la congiungente delle due cariche elettriche.
Il verso della forza elettrica è più complesso di quello di forza gravitazionale: la forza gravitazionale è attrattiva.
Le forze elettriche possono essere sia di tipo attrattivo che di tipo repulsivo.
Si introduce un versore, un vettore unitario, $\vec{u}_2$ con direzione lungo la congiungente di q_1 e q_2 e avente verso opposto, uscente, rispetto alle due cariche.

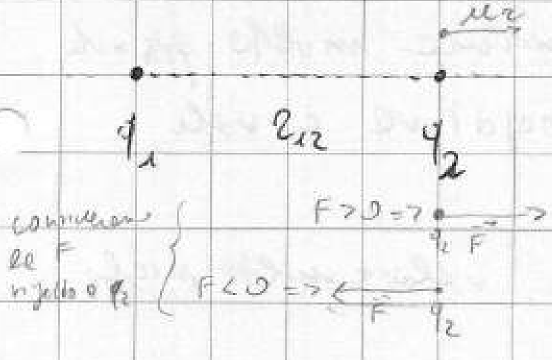


In questo modo siamo in grado di connotare l'interazione tra le due cariche in termini di modulo, direzione e verso, il cui risultato sperimentale, ovvero la forza di Coulomb è:

$$\vec{F} = \boxed{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2}\,\vec{u}_2 \qquad \text{Forza di Coulomb}$$

costante,
Fattore di proporzionalità

La forza di Coulomb può essere sia attrattiva che repulsiva: se q_1 e q_2 hanno lo stesso segno, $F > 0$ e la forza è repulsiva; se q_1 e q_2 hanno segno diverso, allora la forza è di tipo attrattivo.



Se q_1 e q_2 hanno lo stesso segno allora F avrà lo stesso verso di u_r, verso l'esterno e quindi è repulsiva. Se q_1 e q_2 hanno segni diversi, allora F avrà valore negativo, quindi opposto a $\vec{u}_r$, ovvero attrattivo

$$\vec{F} \sim \underbrace{}_{\text{coefficiente di proporzionalità}} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_r$$

Il coefficiente di proporzionalità, chiarito in seguito, dipende dal sistema e dall'unità di misura utilizzato. Qui si userà il Sistema Internazionale di misura dove l'unità di misura della carica elettrica è il Coulomb.

La costante di proporzionalità nel sistema internazionale vale: $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ con ε_0 costante fondamentale, che è la permittività, o costante dielettrica del vuoto

PERMITTIVITÀ O COSTANTE DIELETTRICA NEL VUOTO

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \; N^{-1} \cdot m^{-2} \cdot C^2$$

$$K_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

K_e la costante elettrostatica ha un valore dell'ordine di $9 \cdot 10^9 \; N \cdot m^2 \, C^{-2}$

costante elettrostatica nella legge di Coulomb { Forza di Coulomb $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_r$

K_e è una costante non solo dimensionata ($N^{-1} \cdot m^{-2} \cdot C^2$), ma ha anche un valore diverso dall'unità.

Il Coulomb è una unità di misura molto grande.
La carica di un elettrone è negativa e vale

$$|e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C$$, valore molto piccolo

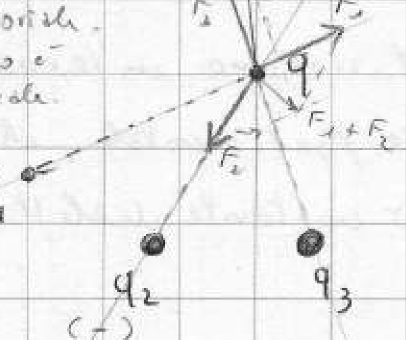
LEGGI FONDAMENTALI DELL'ELETTROSTATICA

20'46"

- Legge di Coulomb
- Principio di conservazione delle cariche   LE CARICHE ELETTRICHE NON VENGONO NÉ CREATE NÉ DISTRUTTE
- Principio di sovrapposizione degli effetti   Più cariche si sommano vettorialmente

Per somma vettoriale.

Il formalismo è di tipo vettoriale.



La carica complessiva nella particella q, $\vec{F}_{TOT}$ è la somma dei tre vettori F_1, F_2, F_3

Questo ci porta al concetto di campo elettrico, che viene normalmente introdotto nel contesto delle forze elettriche, in elettrologia

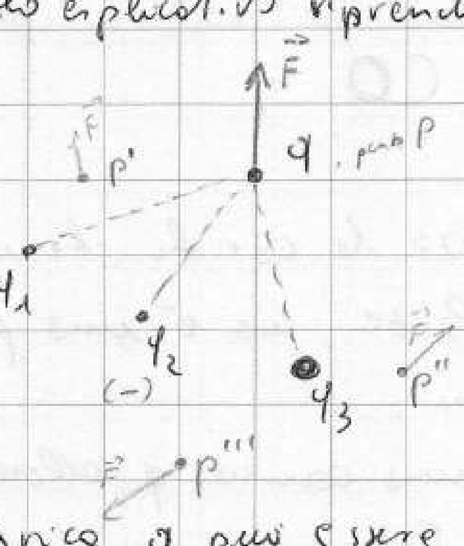
IL CAMPO ELETTRICO

È un campo di forze. In fisica un campo è una concezione astratta.
Campi scalari, come i campi di temperatura, o di pressione, o di massa, sono campi in cui, definito un sistema di assi cartesiani, in ogni punto del sistema cartesiano è definito

un valore, ad esempio una temperatura. Dunque la temperatura è in funzione della posizione in questo tipo di campo, dove le grandezze sono scalari e dipendono dal

33'24" punto e definiscono in un certo volume un campo di tipo scalare.

Esistono poi i campi vettoriali, tra cui il più importante ai nostri fini è il campo di forze.
Dove in ogni punto dello spazio sono in presenza di una forza ~~[illegible]~~ che agisce su una carica, ad es., allora in quel punto esiste un campo di forze.
A titolo esplicativo riprendiamo la forza risultante su q, delle tre cariche q_1, q_2 e q_3



$\vec{F}$ è la forza complessiva agente sulla carica di prova positiva q e dovuta alle cariche q_1, $-q_2$ e q_3 disposte come da figura.

La carica q può essere spostata dal punto P in cui si trova ad un altro punto P' e "costruiamo" la forza complessiva in quel punto; poi spostiamo di nuovo la carica in un punto P'' e costruiamo la forza complessiva; di nuovo con un punto P''' e così via.
La forza calcolata in P', P'' e P''' sarà in genere diversa da quella in P.
La forza dipende dal punto, in modulo, direzione e verso. Il vettore $\vec{F}$ dipende dalla posizione:

35'42" $$\vec{F}(x, y, z)$$

L26.5

Inoltre la forza dipende anche dalla carica di prova q che viene posta nei vari punti.

L'oggetto $\frac{\vec{F}(x,y,z)}{q}$ è il vettore $\vec{F}$ in un punto diviso per la carica q: è sempre un vettore, in quanto è il vettore $\vec{F}$ diviso per lo scalare q.

Questo oggetto è indipendente dalla carica che metto in quel punto. Questo oggetto è definito campo elettrico.

CAMPO ELETTRICO

È qualcosa di definito attraverso le cariche che sono le "sorgenti" del campo di forze, ma è una proprietà del punto che si va a considerare.
Se in un punto P inserisco una carica q allora sulla carica q nasce una forza F.

Il campo elettrico ha una realtà che trascende l'esistenza o meno di una carica nel punto dove il campo è definito.
Il campo esiste perché viene generato dalle cariche ed esiste in tutti i punti dello spazio.
Se inserisco in un certo punto una carica di prova* allora su questa carica di prova nasce una forza.

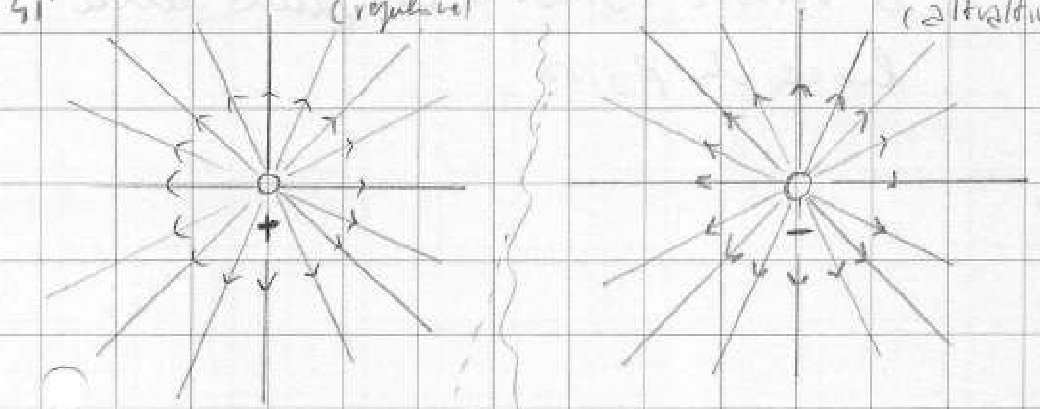
* sempre positiva per def.

L.26.6

INTENSITÀ DEL CAMPO ELETTRICO

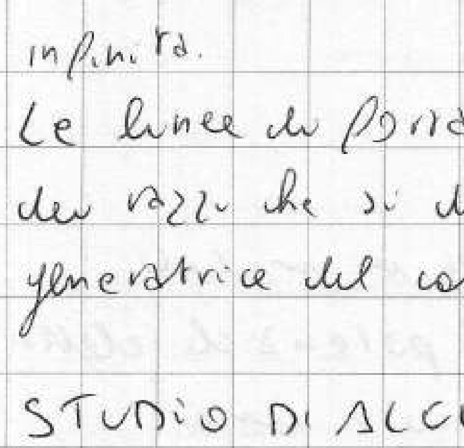
$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Due cariche a distanza grande



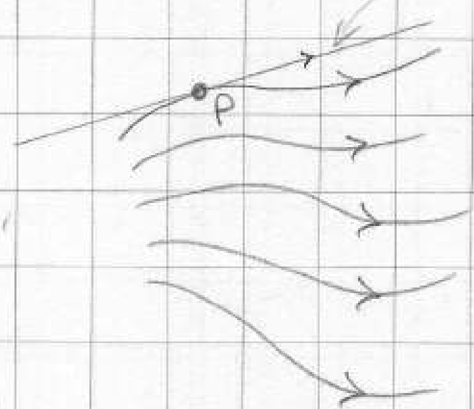
Rappresentazione del campo elettrico con le linee di forza, ovvero linee di flusso, di due cariche, una positiva e una negativa, che non si influenzano, cioè sono a distanza infinita.
Le linee di forza o di flusso sono dei raggi che si dipartono dalla carica generatrice del campo.

STUDIO DI ALCUNE LINEE DI FORZA



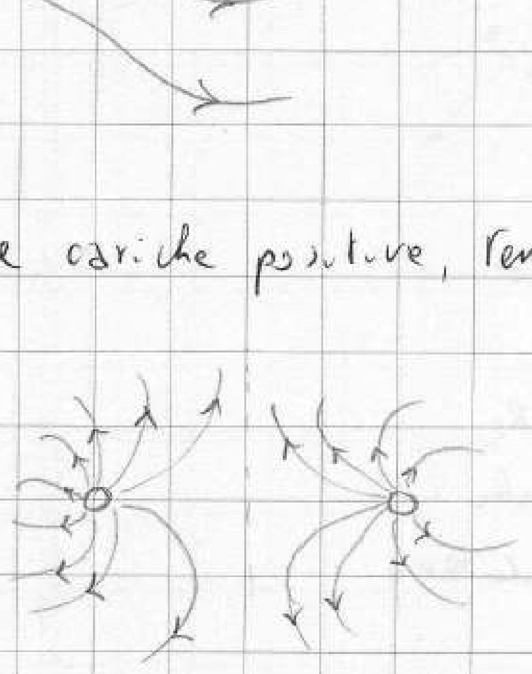
Dove sono compatte, più ravvicinate, il modulo del campo elettrico è più intenso.
L'intensità del modulo del campo è maggiore o minore a seconda che le linee di forza siano rappresentate più o meno vicine.

L'informazione su direzione e verso è data dalla seguente regola, dato un punto P:



la direzione è tangente in P alla linea di flusso;
il verso è concorde con quello della linea di forza.

Due cariche positive, tenute fisse ad una certa distanza



Vedremo come il campo elettrico possa in modulo essere rappresentato scalarmente dal potenziale elettrico, introducibile perché il campo elettrico è una forza di tipo conservativo.

LEZIONE 27 CAMPO POTENZIALE ELETTROSTATICO

Prof Paolo Alba
48'37"

campo elettrostatico prodotto da due cariche positive

Proprietà del campo elettrostatico

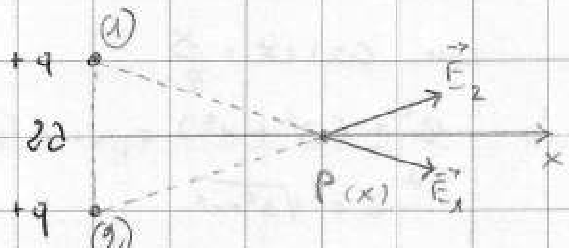
Potenziale elettrostatico

CAMPO ELETTROSTATICO PRODOTTO DA DUE CARICHE POSITIVE

È una funzione del punto che è definita in tutti i punti dello spazio escludendo l'origine dove le cariche si trovano.

Una carica di prova inserita in un campo elettrostatico è sottoposta ad una forza misurabile.

<u>Il campo ha una sua realtà anche in assenza della carica di prova.</u>



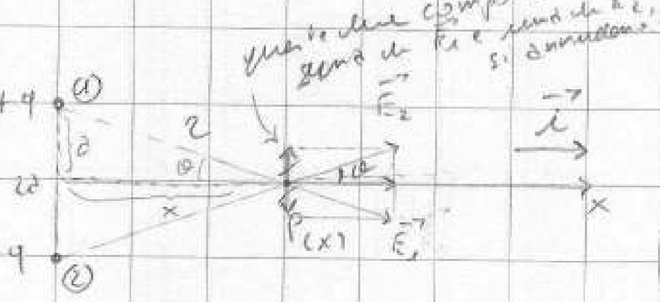
La carica di prova nel punto P sarà sottoposta ad una forza repulsiva.

Siano date due cariche positive q, 1 e 2, di uguale intensità, alla distanza 2a. Si vuole calcolare il campo elettrostatico delle due cariche nel punto P, posto su un asse perpendicolare alla congiungente delle due cariche. La posizione del punto permette di semplificare i calcoli a causa della sussistenza di simmetria.

Il campo totale nel punto P è la somma del campo prodotto dalla carica in alto con quello prodotto dalla carica in basso.

La carica di prova nel punto P sarà soggetta ad una forza di tipo repulsivo.

La forza in P data dalla carica 2 sarà $\vec{E}_2$, secondo le modalità prima in modulo, direzione e verso.



È possibile scomporre sia $\vec{E}_1$ che $\vec{E}_2$ in una componente perpendicolare a x e una componente parallela a x.
Le due componenti uguali e di verso opposto si annullano.

È dunque, a questo punto descrivere il campo complessivo

$$\vec{E}_{TOTALE} = |\vec{E}_{TOTALE}| \cdot \vec{i}$$

↳ versore unitario diretto lungo l'asse x

$$|\vec{E}_{TOTALE}| = 2 \cdot |\vec{E}_1| \cdot \cos\theta$$

e abbiamo

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

↳ r è un lato del triangolo rettangolo

$$\vec{E}_{TOTALE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q}{r^2} \cdot \cos\theta \cdot \vec{i}$$

con $\cos\theta = \frac{x}{r}$

e $r^2 = (a^2 + x^2)$ e, sostituendo ⇒ $r = \sqrt{a^2+x^2}$

$$\vec{E}_{TOTALE} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2q}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot x \cdot \vec{i}$$

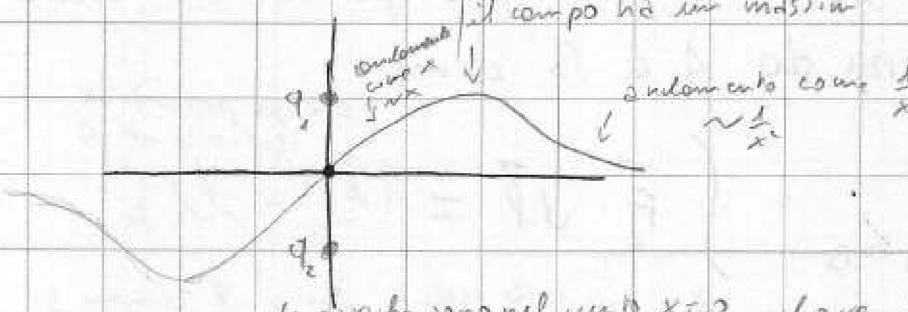
perché $r = \sqrt{a^2+x^2}$ => al denominatore abbiamo $(a^2+x^2) \cdot \underset{\sqrt{a^2+x^2}}{r} = (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}$

Questo è il campo totale lungo l'asse, così è sempre diretto lungo l'asse x ed è diretto verso destra o sinistra a seconda che x sia positivo o negativo

L. 27 2

Dunque l'andamento geometrico del campo è proporzionale a $\frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$, cioè:

$$E_{TOT} \sim \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$



le cariche sono nel punto $x=0$, dove il campo è nullo

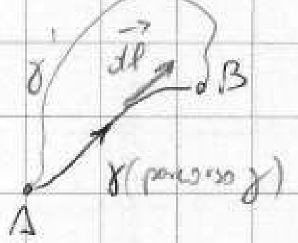
Si noti come il campo vada con il quadrato della distanza solo per distanze grandi, mentre in prossimità delle cariche ha un andamento diverso.
La legge di Coulomb ha validità per cariche puntiformi.
In questo caso, con due cariche, vale per le lunghe distanze, ma non in prossimità delle due cariche.
Si noti anche la difficoltà analitica in questo caso, che risulta essere il caso più semplice analizzabile. Il calcolo di campi elettrici è, di norma, piuttosto complicato.

Nel caso della elettrostatica, per fortuna, siamo in condizioni di introdurre una descrizione alternativa dei fenomeni elettrici che non fa uso del concetto di campo ma fa uso del concetto di potenziale, che in elettrostatica è possibile scambiare vicendevolmente per una relazione univoca tra l'uno e l'altro

LE FORZE CONSERVATIVE

IL LAVORO NON DIPENDE DAL PERCORSO

La forza dipende dallo spazio; spostando il punto di applicazione



della forza da A a B lungo un percorso γ curvilineo qualsiasi, si può definire il lavoro associato allo spostamento della forza da A a B come:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Lavoro} \\ \text{da A a B}}}{L_{A \to B}} = \int_\gamma \vec{F}_c \cdot d\vec{l} = U_A - U_B$$

energia potenziale definita in A

prodotto scalare, lungo il percorso γ.

dl è l'elemento di lunghezza sul tratto curvilineo.
È un vettore infinitesimo che punto per punto è tangente alla traiettoria considerata

Nel caso di forze qualunque, il lavoro L dipende dal percorso. Esiste una classe di forze fisiche per le quali questo lavoro è indipendente dal percorso, fa cui ammette lo stesso lavoro sia per un percorso γ che per un qualsiasi percorso γ' purché gli estremi A e B di partenza e di arrivo coincidano. Questa classe di forze è la classe delle forze conservative.

E nel caso delle forze conservative è possibile introdurre una funzione del solo spazio che è chiamata energia potenziale tale che il lavoro associato ad una forza conservativa (F_c) è dato dalla differenza di energia potenziale nel punto A con l'energia potenziale definita nel punto B, $U_A - U_B$.

Il lavoro di una forza conservativa lungo una curva chiusa è così definito:

$$L = \oint \vec{F}_c \cdot d\vec{l} = 0$$

L.27.4

Una forza conservativa è una forza che ammette energia potenziale, ovvero è una forza il cui lavoro non dipende dal percorso effettuato per spostare il punto di applicazione della forza da A a B, ma dipende solo dagli estremi, ovvero è una forza la cui circuitazione è identicamente 0.

Queste sono forme alternative per esprimere lo stesso concetto di forza conservativa; schematicamente:

forza conservativa → ammette energia potenziale
→ non dipende dal percorso
→ la circuitazione è 0 (lavoro = 0)

Le forze di tipo centrale, che dipendono solo dalla distanza dall'origine della forza, ma non dall'angolo, sono forze intrinsecamente conservative.
Le forze di tipo elettrico, le forze coulombiane sono forze conservative

DEF: IL CAMPO ELETTRICO È UN CAMPO CONSERVATIVO

Al campo elettrico, in quanto campo conservativo, si può associare una espressione analitica che gioca il ruolo dell'energia potenziale, quando si parla di forza.
Il campo non è una forza, è una forza per unità di carica, quindi possiede anche delle dimensioni fisiche che sono diverse, tuttavia la sua analogia con le forze è molto stretta.
Così come il campo è una forza per unità di carica, possiamo allora definire il lavoro per unità di carica.

1 27. T

LAVORO SU UNA CARICA

$$\boxed{\frac{L}{q}} = \int_A^B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{campo elettrostatico}}}{\vec{E}} \cdot d\vec{l} = \underbrace{V_A - V_B}_{\substack{\text{DIFFERENZA di una funzione detta} \\ \text{POTENZIALE ELETTROSTATICO}}}$$

Lavoro per unità di carica dovuto a un campo elettrico.

Essendo un campo conservativo non importa il percorso, ma solo gli estremi.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Queste considerazioni sono molto importanti perché permettono di associare ad un campo che è una funzione vettoriale, un campo di forze con una funzione vettoriale, una funzione che è uno scalare che è il potenziale, collegato al campo in modo quasi univoco.

campo	$\longrightarrow$	potenziale
funzione vettoriale	$\longleftarrow$	funzione scalare

Quindi si può dare una descrizione dei fenomeni dell'elettrostatica in termini di campo elettrico oppure in termini di potenziale elettrico, secondo la convenienza.

Vediamo la relazione che lega il campo e il potenziale, che è molto simile a quella che lega la forza alla energia potenziale

$$\vec{F}_c = -\text{grad}\, \underbrace{U(x,y,z)}_{\text{energia potenziale}}$$

$$\vec{E} = -\text{grad}\, \underbrace{V(x,y,z)}_{\text{potenziale elettrostatico}}$$

OPERATORE GRADIENTE

$$\text{grad} = \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

una specie di derivata direzionale; operatore differenziale vettoriale

$$\vec{E} = -\text{grad}\, V \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot V$$

campo elettrico

$$\vec{E} = -\left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot\vec{k}\right]$$

conoscendo V, il potenziale, si calcola il campo E, il campo elettrico

diff. di potenziale

$$\boxed{V_A - V_B} = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

conoscendo il campo elettrico E, si calcola la diff. di potenziale tra A e B.

IL POTENZIALE, IN ALTRI TERMINI, È DEFINITO A MENO DI UNA COSTANTE, CHE È INESSENZIALE E ARBITRARIA, CHE PUÒ ESSERE SCELTA DI VOLTA IN VOLTA

N.B.:
$V_A - V_B = V_1$
$V_A - V_C = V_2$
ecc.

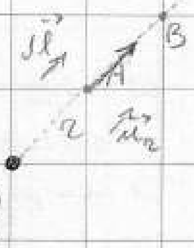
Dato un certo campo, si può ottenere analiticamente infiniti valori del potenziale in ogni punto dello spazio, ma tutti questi valori differiscono tra di loro a meno di una costante.

Se a questa costante viene attribuito un determinato valore e mantenuto fisso allora avremo una funzione definita su tutti i punti dello spazio che rappresenta il potenziale ed è una funzione scalare.

Se viene cambiata la costante di integrazione allora tutti i punti dello spazio saranno caratterizzati da una nuova funzione potenziale che differisce dalla precedente per il

valore della costante variata.
Il potenziale è definito a meno di una costante.
Anche il campo gravitazionale è definito a meno di una costante.
La differenza di potenziale, in un campo elettrico, è l'informazione che più interessa, piuttosto del potenziale.

IL POTENZIALE DI UNA CARICA PUNTIFORME



$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \boxed{\vec{dl}}$$

si legge "scalare"

$$\boxed{\vec{dl}} = \underset{\text{modulo di } dl}{dl}\ \underset{\text{direzione } \vec{u}_r}{\vec{u}_r}$$

$$V_A - V_B = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q}_{\text{sono costanti}} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} \cdot \vec{u}_r \boxed{dl \cdot \vec{u}_r}$$

$\to dr$, cui dl è un elemento radiale dr;
n.b.: $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = 1$

$$V_A - V_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_A}^{r_B} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \cdot \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right]$$

IL POTENZIALE DI UN PUNTO RISPETTO AD UN ALTRO PUNTO

Ci chiediamo dove prendere il punto di riferimento e che potenziale possiamo attribuire al punto di riferimento.
Immaginiamo di allontanare il punto B in modo che r_B cresca e cresca in modo indefinito, cioè $r_B \to \infty$.
Se il punto B è il punto all'infinito allora possiamo valutare il potenziale associato ad una singola carica con riferimento al punto all'infinito.
Si può imporre che il potenziale del punto all'infinito sia 0, ovvero $V_\infty = 0$.
Sotto questa ipotesi il potenziale del punto A rispetto al potenziale del punto all'infinito è dato da:

$$V_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot \frac{1}{r_A}$$

Quindi il potenziale di una carica puntiforme è espresso da:

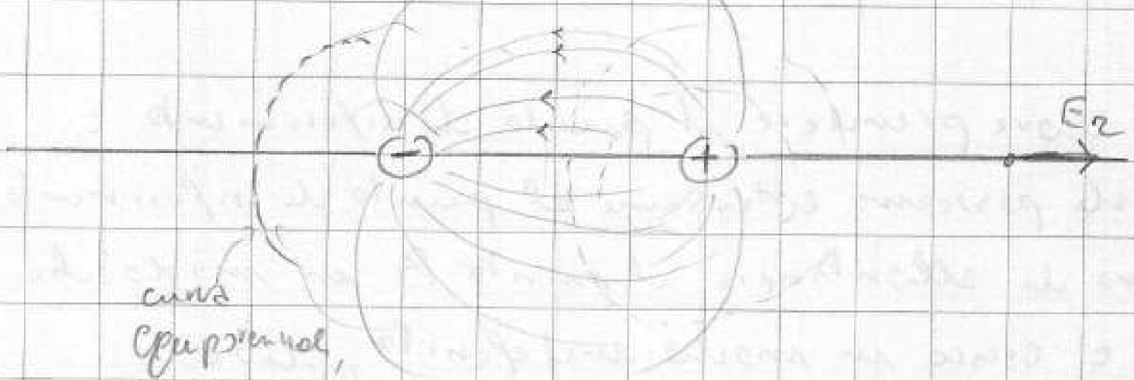
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

sorgente del campo
distanza da q

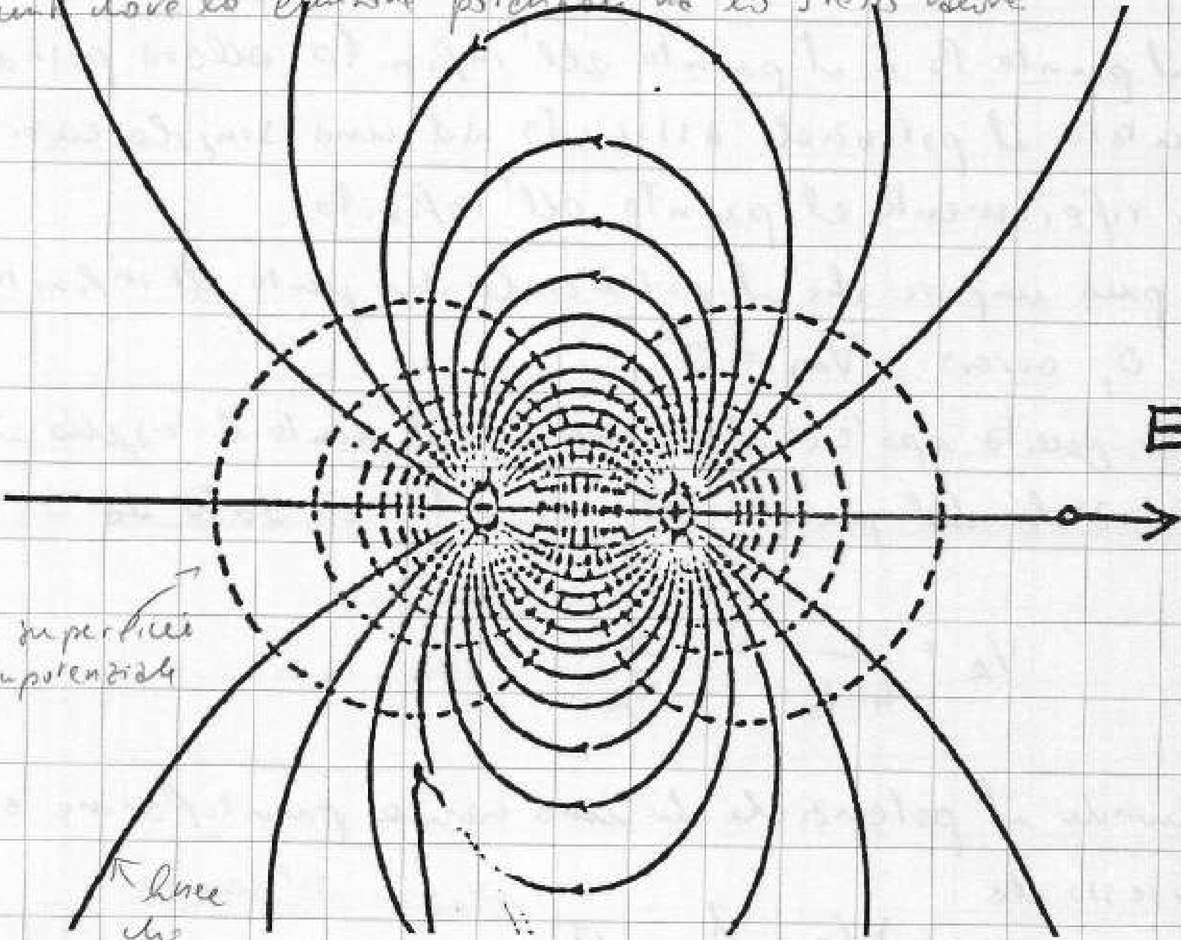
V è una espressione scalare, non ci sono connotazioni vettoriali.
Ad essa è associabile l'espressione del campo elettrico prodotto da una carica puntiforme

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

IL DIPOLO ELETTRICO



curva equipotenziale, luogo dei punti dove la funzione potenziale ha lo stesso valore.



superficie equipotenziale

linee di flusso del campo, sempre perpendicolari alle superfici equipotenziali.

Il potenziale sulle superfici equipotenziali è sempre lo stesso, dunque il lavoro è 0.
Perché questo sia vero il campo elettrico deve essere perpendicolare allo spostamento.

L 27.10

LEZIONE 28 CALCOLO DI POTENZIALI; CONCETTO DI FLUSSO

Prof. P. Alio
48'25"

Unità di misura del potenziale
Esempi di calcolo di potenziali
Concetto di flusso (di vettore)
Flusso del campo elettrico: teorema di Gauss

CAMPO ELETTRICO È CONSERVATIVO
POTENZIALE (importante in elettrotecnica)
INTERESSA LA DIFF. DI POTENZIALE

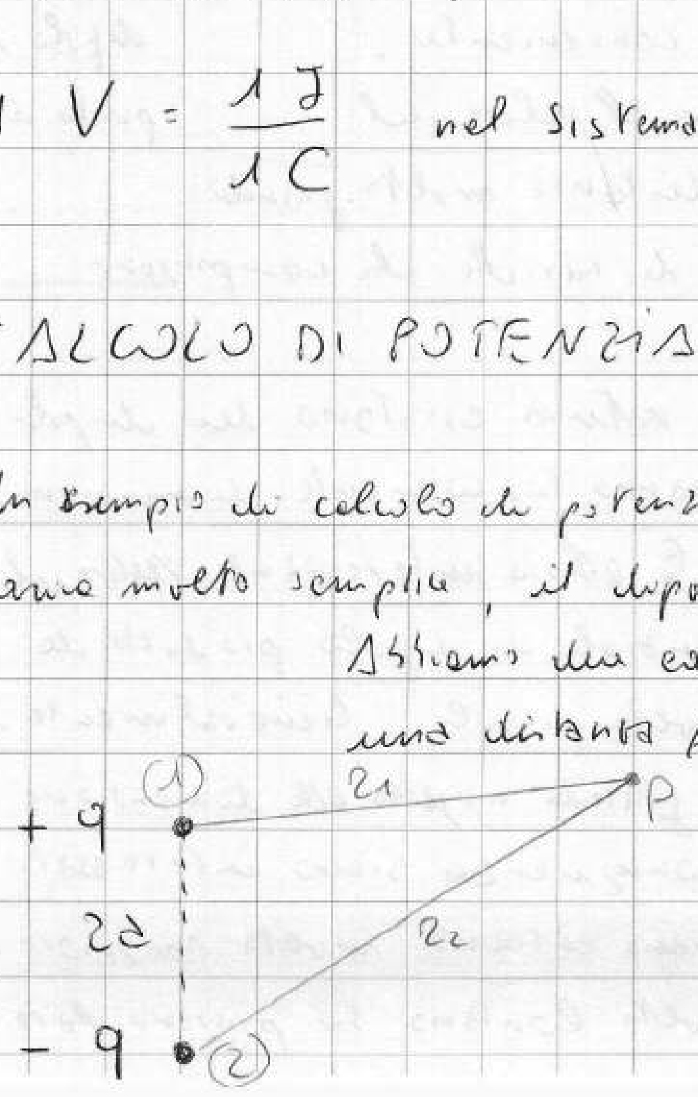
UNITA' DI MISURA DEL POTENZIALE
... E DIMENSIONI

Il potenziale è definito come una energia potenziale, quindi sostanzialmente un lavoro per unità di carica.
Nel S.I. il lavoro si misura in Joule; la carica elettrica si misura in Coulomb.
Quindi l'unità di misura del potenziale è $\frac{J}{C}$, che prende il nome di Volt.

$$1\ V = \frac{1\ J}{1\ C}$$ nel Sistema Internazionale

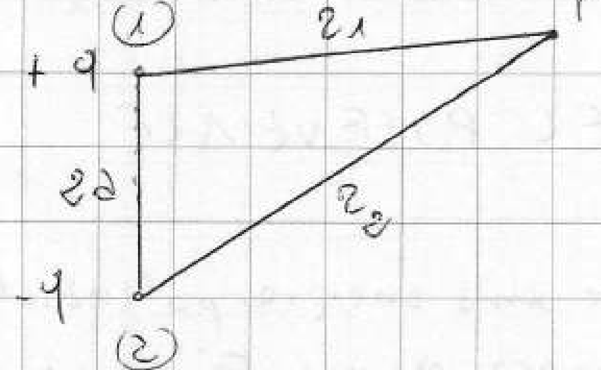
CALCOLO DI POTENZIALE

Un esempio di calcolo di potenziale di una distribuzione di carica molto semplice, il dipolo elettrico, visto a fine lez. prec.
Abbiamo due cariche, $+q$ e $-q$ distanti a una distanza fissa $2d$, siano rispett. 1 e 2.



Consideriamo un punto P ad una distanza diversa da 1 e da 2, e siano r_1 e r_2 le due distanze

Il calcolo del potenziale è semplice perché si tratta di sommare i contributi scalari del potenziale dovuto alla carica 1 più il potenziale dovuto alla carica 2, entrambi valutati nel punto P.



Il potenziale totale sarà:

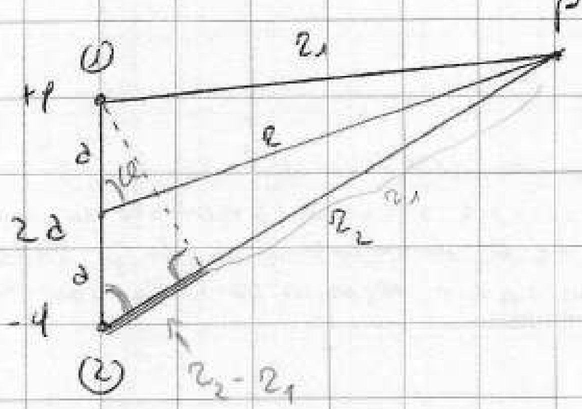
$$V = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{COSTANTE} \\ \text{DIELETTRICA} \\ \text{NEL VUOTO}}}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \left[\underbrace{\frac{q}{r_1}}_{\substack{\text{contributo al} \\ \text{potenziale} \\ \text{della carica 1}}} \overset{\substack{\text{perché la} \\ \text{carica è} \\ \text{negativa}}}{-} \underbrace{\frac{q}{r_2}}_{\text{potenziale}} \right] =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot q \cdot \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cdot r_2}$$

e questo descrive il potenziale del dipolo in ogni punto dello spazio

La formula è esatta, ma possiamo fare delle approssimazioni convenienti.
In generale saremo interessati al valore del potenziale del dipolo a distanze molto grandi rispetto alla distanza fra le cariche che compongono il dipolo.
Questo perché in realtà in natura esistono dei dipoli elettrici elementari che hanno tipicamente dimensioni atomiche o molecolari. È allora interessante vedere il campo di dipolo e il potenziale di dipolo prodotto da questi sistemi che sono molto piccoli. Generalmente ci si colloca a distanze che sono grandi rispetto alla dimensione laterale del dipolo. Di conseguenza siamo interessati al caso in cui r_1 e r_2 siano entrambi molto maggiori di $2a$.
Quando il punto P è molto lontano, si possono fare delle

approssimazioni molto conveniente.
Consideriamo il punto centrale della congiungente delle due cariche e sia r la distanza del punto centrale con P.



In questa configurazione $r_1 < r < r_2$, ma, per r molto grande le distanze differiscono molto poco.
In particolare possiamo definire il segmento evidenziato che altro non è che $r_2 - r_1$, che può essere definito in termini della distanza $2a$ e il coseno dell'angolo alla carica 2.
Questo angolo, con P molto lontano, nella pratica differisce di valori molto piccoli con l'angolo formato da r con la congiungente e quindi in prima approssimazione sono identificabili.
Sia θ l'angolo formato come detto.
Abbiamo

$$r_2 - r_1 = 2a \cdot \cos\theta$$

e

$$r_1 \cdot r_2 = r^2$$

($r_1 \cdot r_2$ differisce per infinitesimi di ordine superiore da $r \cdot r$ e quindi si può scrivere l'equivalenza e confondere le due valore)

Con queste approssimazioni, che valgono soltanto per punti lontani dal dipolo, ovvero lontani dalla dimensione laterale del dipolo, la formula del potenziale può così essere esplicitata

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2a \cdot q \cdot \cos\theta}{r^2}$$

Le variabili sono 2, r e θ perché c'è simmetria cilindrica attorno all'asse del dipolo; r e θ sono due coordinate r/..

Andamento del potenziale in funzione di r e θ.
r è la distanza fra P e il punto centrale della congiungente le cariche
θ è l'angolo formato dall'asse del dipolo e la retta r.

../.. spaziale per conoscere tutti i punti dello spazio.

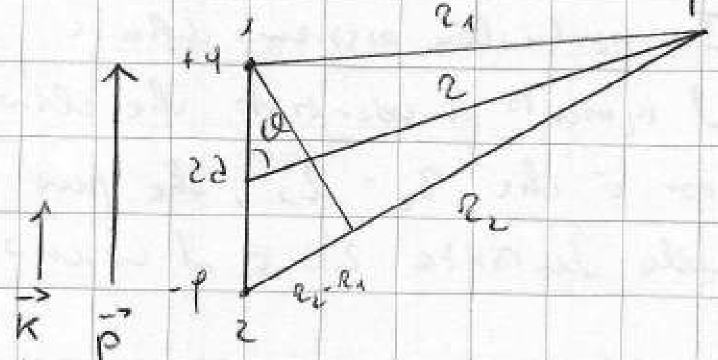
Possiamo riscrivere il concetto introducendo un vettore che chiamiamo $\vec{p}$, momento di dipolo, che è:

valore della carica del dipolo

$$\vec{p} = \underbrace{2a \cdot q}_{\text{modulo di } \vec{p}} \; \vec{K}$$

modulo di $\vec{p}$, compare al numeratore di V

$\vec{K}$ direzione dell'asse del dipolo, è un versore verticale orientato in modo tale che il momento di dipolo $\vec{p}$ vada dalla carica negativa verso la carica positiva.



$\vec{p}$ momento di dipolo

orientato in modo che il momento di dipolo vada dalla carica − alla carica +.

Quindi:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2aq\cos\theta}{r^2} =$$

modulo del momento di dipolo

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p\cos\theta}{r^2}$$

Conoscendo il potenziale possiamo definire il campo elettrico, considerando le relazioni tra campo e potenziale.

RELAZIONI TRA CAMPO E POTENZIALE

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

$\vec{E}$ campo elettrico

$$\vec{E} = -\,\text{grad}\; V$$

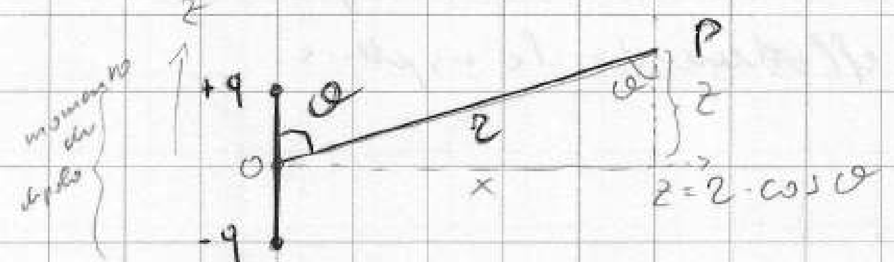
conoscendo il potenziale, in ogni punto, ne calcolo il gradiente* e trovo il campo elettrico in ogni punto

* gradiente = derivate parziali prime poste a 0

L.28.4

CALCOLO DEL CAMPO DAL POTENZIALE

Occorre una rappresentazione cartesiana del potenziale con l'asse z orientato secondo l'asse del dipolo, secondo cioè il momento del dipolo, verso l'alto, allora la posizione di P può essere connotata da una quota rispetto all'origine degli assi, che è il punto di mezzo del dipolo. La quota sia z, per cui



Sia sempre P a grande distanza dal dipolo; allora il potenziale è:

$$z = \cos\vartheta$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overset{2a\cdot q \text{ momento del dipolo}}{p} \cdot z}{r^3} \qquad (\text{n.b.: } \cos\vartheta = \frac{z}{r})$$

↳ r è la distanza di P dagli assi,

r è la distanza di P dagli assi, ovvero:

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ quindi}$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p \cdot z}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot p \cdot \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$ in coordinate cartesiane.

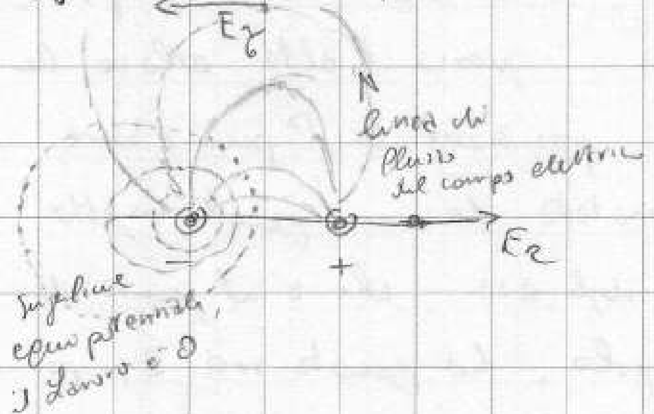
A questo punto possiamo ottenere le componenti del vettore campo elettrico differenziando parzialmente la funzione V, che è funzione di x, y, z.

Ad es., la componente x del campo elettrico, E_x è:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot p \cdot z \cdot \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3} \cdot \left(-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x\right) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot p \cdot \frac{3zx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} = E_x$$

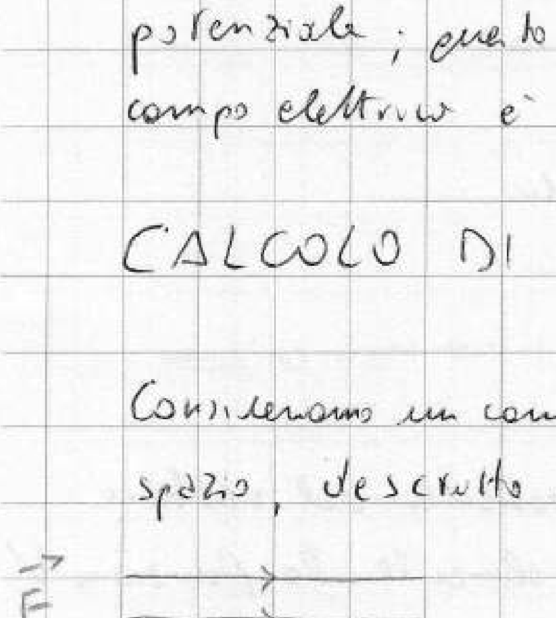
Espressioni analoghe possono essere ottenute per la componente E_y e E_z, effettuando le rispettive differenziazioni parziali



Le superfici equipotenziali e le linee di flusso sono sempre perpendicolari tra di loro.
In alcuni casi, conoscendo il campo è possibile calcolare il potenziale; questo in configurazioni semplici, dove il campo elettrico è simmetrico.

CALCOLO DI UN POTENZIALE, DATO IL CAMPO

Consideriamo un campo elettrico uniforme in una regione dello spazio, descritto da linee di flusso parallele tra di loro ed



equispaziate, sapendo per convenzione che linee di flusso equispaziate rappresentano un campo elettrico uniforme. Quindi il campo elettrico ha lo stesso valore in tutti i campi dello spazio considerato.

Consideriamo due punti A e B e valutiamone la differenza di potenziale tra A e B

$$V_A - \cancel{V}_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Dunque sia d la distanza tra A e B
Nello spostamento tra A e B il vettore spostamento elementare $d\vec{l}$ è parallelo alla direzione ed ha la stessa direzione del campo elettrico.
Questo significa che $\vec{E} \cdot d\vec{l}$ si traduce nel moltiplicare il modulo di $\vec{E}$ per il modulo di $d\vec{l}$

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B E \cdot dl = \underbrace{E}_{\text{perché è costante}} \int_{x_A}^{x_B} dx =$$

dl, l'elemento di spostamento, in questo caso lungo l'asse x.

x_A: in un sistema di riferimento x

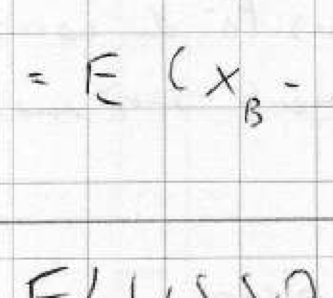
$$= E(x_B - x_A) = E\,d$$

d: cioè la distanza tra A e B.

FLUSSO DEL VETTORE CAMPO ELETTRICO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

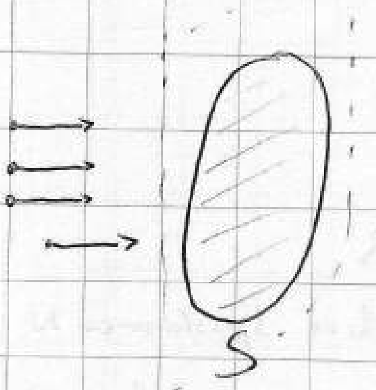
(ARGOMENTO CONNESSO AL COMPORTAMENTO DEL VETTORE CAMPO ELETTRICO)

Il concetto di flusso di un vettore qualunque è mediato dall'idrodinamica. Supponiamo di avere dei vettori velocità associati a particelle



Ad un dato istante le particelle attraversano una superficie piana, S.
Il piano della superficie S sia perpendicolare al flusso delle particelle, che, in questo primo esempio è considerato essere idrodinamico.

Abbiamo un grande numero di particelle che attraversano la sezione S; tutte attraversano la superficie.

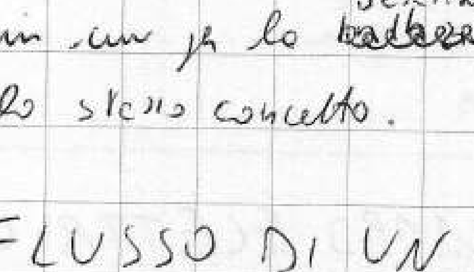


Il concetto di transito di materia attraverso una superficie dipende in qualche modo dalla velocità con cui le particelle si stanno muovendo e dalla orientazione della superficie che si considera, rispetto al vettore velocità, o, come si dice, al campo velocità.

Il concetto di flusso in ambito idrodinamico può essere traslato alla discussione di fenomeni inerenti in generale campi vettoriali di qualsiasi genere e natura.

I concetti sopra esposti torneranno utili quando sarà trattato l'argomento corrente elettrica e vettore densità di corrente, in cui già la ~~trattazione~~ descrizione microscopica della corrente sarà usato lo stesso concetto.

FLUSSO DI UN VETTORE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE (PARAMETRIZZAZIONE)



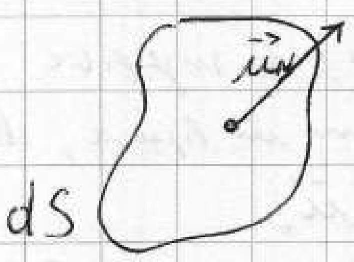
Consideriamo una parte della superficie, sufficientemente piccola da essere considerata piana, per cui il discorso varrà anche per superfici sferiche purché la regione della superficie sia tanto piccola da poter essere considerata piana in prima approssimazione.

Sia $\vec{V}$ un vettore generico, la cui intensità può variare in funzione del punto della superficie.

Questo perché non è .../.

../.. detto che il campo vettoriale sia un campo costante.

La superficie è orientata rispetto alla direzione del vettore e possiamo parametrizzare l'orientazione in un modo caratteristico.



Consideriamo un versore, cioè un vettore unitario, u_N che è diretto perpendicolarmente al piano contenente la superficie, la cui superficie, a tutti gli effetti piana e molto piccola, sarà connotata dalla denominazione dS.

È, cioè, un elemento di superficie.

E $\vec{u}_N$ è un versore che è perpendicolare al piano che contiene l'elemento di superficie dS.

Definiamo ora un oggetto matematico che è dato dal prodotto scalare del vettore $\vec{V}$ per il versore $\vec{u}_N$ e moltiplicato per la superficie elementare dS.

$$\boxed{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{scalare}}}{\vec{V} \cdot} \vec{u}_N \; dS} = d\Phi_V$$

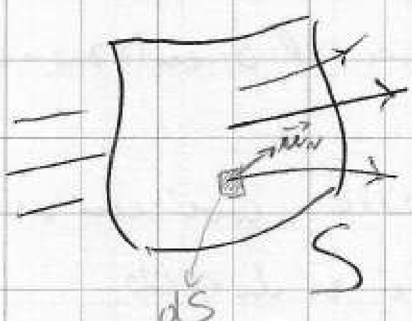
Flusso elementare del vettore $\vec{V}$ attraverso la superficie dS

Questo oggetto, che è uno scalare perché (prodotto) scalare di due vettori, è detto **flusso elementare del vettore $\vec{V}$ attraverso dS** connotato col simbolo $\boxed{d\Phi_V}$, (de Pi) con pedice V che rappresenta un flusso elementare perché attraverso una superficie microscopica elementare.

Questo tipo di relazione è una relazione locale, che vale per un elemento di superficie.

L.28.9

Data una superficie arbitraria S, con linee di flusso di un campo vettoriale qualsiasi che stanno attraversando la superficie.



L'elemento arbitrario di superficie dS denotato come in figura, che avrà un suo $\vec{u}_N$.

Per ogni elemento di area della superficie dobbiamo effettuare l'operazione del prodotto scalare $\vec{V} \cdot \vec{u}_N \, dS$ e sommare su tutti i contributi di area, che è infinitesima, quindi questa somma non sarà di elementi finiti, ma un integrale di superficie di elementi infinitesimi, ovvero, l'oggetto flusso è questo integrale:

$$\Phi_V = \int \underbrace{\vec{V}}_{\text{vettore}} \cdot \underbrace{\vec{u}_N}_{\text{versore}} \cdot \underbrace{dS}_{\text{elemento di superficie}}$$

L'integrale è dunque il flusso del vettore $\vec{V}$ attraverso la superficie S

Flusso del vettore $\vec{V}$ disegnato con delle opportune linee di flusso, o linee di forza.

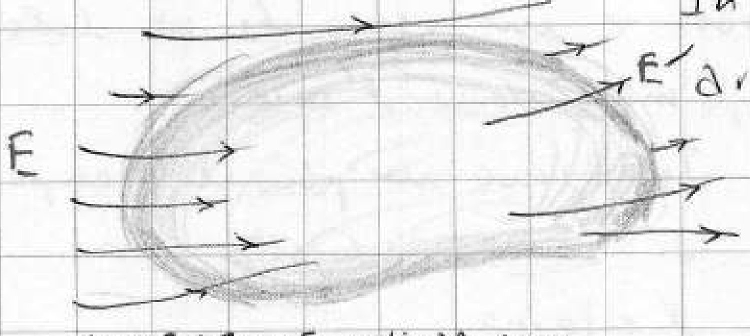
~~Questo indipendentemente dal tipo di vettore~~

Questo per un qualsiasi vettore indipendentemente dal fatto che ci sia o meno trasporto di materia.

Applichiamo questo concetto al campo elettrico, che è un campo vettoriale, definito in ogni punto dello spazio, definendo il concetto di flusso del campo elettrico attraverso una superficie aperta.

1 28.10

È importante tenere di conto che il concetto di flusso è applicabile a qualsiasi tipo di superficie, anche ad una superficie chiusa.



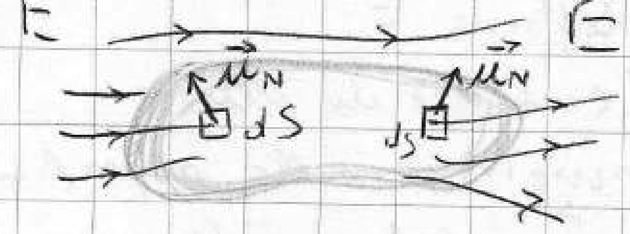
SUPERFICIE CHIUSA CON LINEE DI FORZA, O DI FLUSSO, DEL VETTORE CAMPO ELETTRICO E

In disegno una superficie chiusa arbitraria, con delle linee di flusso del vettore campo elettrico E.
Le linee di flusso penetrano nella superficie in qualche punto, escono dalla superficie in qualche altro punto.

È interessante valutare il flusso totale attraverso questa superficie.
Anche in questo caso occorre suddividere la superficie arbitraria in tanti elementi di area e andare a disporre in ogni elemento di area il versore $\vec{u}_n$ che è normale a ciascun elemento di area.
Nel caso di una superficie chiusa abbiamo un problema topologico, abbiamo un esterno ed un interno.
Una superficie chiusa racchiude un interno e separa il mondo esterno dall'interno, quindi occorre una convenzione per l'orientazione del versore unitario. ~~direzione e verso del versore perpendicolare alla superficie sono stati stabiliti come segue.~~
~~Il versore unitario è orientato~~
La scelta che si fa in elettrostatica è quella di orientare il versore unitario relativo ad un elemento

1.22 11

di superficie chiusa verso l'esterno.
Quindi il versore unitario, per definizione, ha una direzione perpendicolare al piano tangente alla superficie nel punto considerato e un verso che va dalla superficie verso l'esterno, mai verso l'interno.



In figura un paio di esempi di versori diretti verso l'esterno.
Il versore $\vec{u}_N$ dipende dal punto sulla superficie e per avere il flusso totale occorre sommare su tutta la superficie.
Da notare che ci sono delle regioni in cui il flusso è entrante nella superficie. Allora questo significa che il campo vettoriale E è diretto dall'esterno verso l'interno della superficie mentre $\vec{u}_N$ è diretto verso l'esterno, quindi significa che localmente il vettore E è antiparallelo, o comunque ha una forte componente antiparallela a $\vec{u}_N$.
Laddove il vettore E è uscente dalla superficie, allora E e $\vec{u}_N$ sono paralleli o quasi paralleli.
Questo significa che il prodotto scalare che è sensibile alla mutua orientazione di E e $\vec{u}_N$ sarà tipicamente positivo dove il campo E è uscente e tipicamente negativo dove il campo E è entrante.
Quindi il flusso complessivo attraverso la superficie illustrata è la sovrapposizione di componenti positive dove esce E e negative dove entra E.
Flusso negativo significa campo entrante nella superficie e flusso positivo (locale) significa campo uscente dalla superficie.
L.28.12 47'10"

TEOREMA DI GAUSS

IMPORTANTE PROPRIETÀ RELATIVA AL CAMPO ELETTROSTATICO.

Il teorema di Gauss, importante proprietà relativa al campo elettrostatico, mette in relazione il flusso del campo elettrico attraverso una qualunque superficie chiusa con la quantità di carica elettrica racchiusa all'interno della superficie.
Abbiamo visto che il flusso del campo elettrico attraverso una qualche superficie può essere positivo, può essere negativo e può anche essere nullo.
Vedremo che effettivamente il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa non è affatto nullo ma è proporzionale proprio alla carica netta presente all'interno della superficie.
E questo è il teorema di Gauss che costituisce uno dei pilastri della elettrostatica e della elettrodinamica, quindi della moderna teoria dei fenomeni elettrici e magnetici.

... segue nella lez 23.

L.28.14

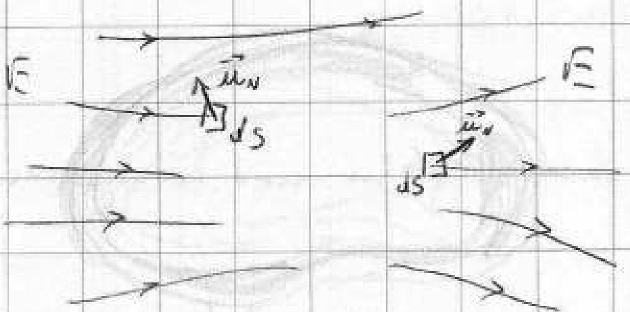
LEZIONE 29 TEOREMA DI GAUSS E SUE APPLICAZIONI

Prof. Paolo Alta
50'33"

Calcolo del flusso del campo elettrico in casi particolari

Legge di Gauss

Calcolo di campi elettrici tramite il teorema di Gauss



Il disegno, della lezione precedente, rappresenta un insieme di linee di flusso del vettore campo elettrico che attraversano una superficie chiusa di forma arbitraria. La superficie chiusa è costituita da elementi di superficie elementare dS, la cui somma, che si traduce in un integrale di superficie, darebbe il valore dell'intera area della superficie considerata.

Ciascun elemento dS è caratterizzato da un versore $\vec{u}_N$ che è localmente perpendicolare al piano tangente alla superficie nel punto considerato ed è diretto, per convenzione, esternamente alla superficie stessa.

Il flusso del vettore campo elettrico Φ_E ("Fi con E") è ottenuto come segue: eseguendo, cioè, localmente il prodotto scalare $\vec{E} \cdot \vec{u}_N$, moltiplicato per dS e integrando sulla superficie e, se la superficie è chiusa, l'integrale sarà connotato col simbolo $\oint$.

Funzione integranda, funzione del punto.

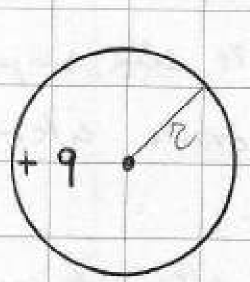
$$\underbrace{\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_N \, dS}_{\text{FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO}}$$

L'integrando, la funzione integranda $\vec{E} \cdot \vec{u}_N$ è evidentemente funzione del punto sopra la superficie perché $\vec{E}$ può essere funzione del punto e anche perché le direzioni reciproche di $\vec{E}$ e $\vec{u}_N$ possono essere diverse da punto a punto

Il prodotto scalare $\vec{E}\cdot\vec{u}_N$, funzione integranda in funz. del punto, significa modulo di $\vec{E}$, per modulo di $\vec{u}_N$ che è 1, per il coseno dell'angolo compreso tra $\vec{E}$ e $\vec{u}_N$, angolo variabile da punto a punto per una superficie arbitraria.

TEOREMA DI GAUSS dimostrazione

Il teorema di Gauss può essere dimostrato in una condizione particolare che sarà quella adottata.
La dimostrazione semplificata seguente, può essere estesa a un caso generale.
Consideriamo una singola carica puntiforme, che occupa una certa posizione dello spazio.



Si vuole determinare il flusso del campo elettrico prodotto dalla carica +q attraverso una superficie chiusa che circonda la carica.
Per semplicità la superficie scelta è una superficie sferica centrata alla carica stessa. Sia r il raggio della sfera.

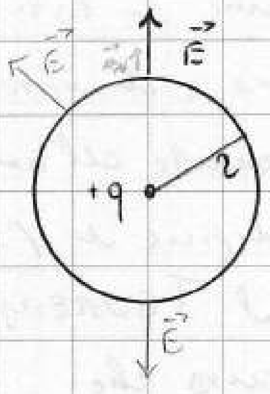
Φ_E

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\,\vec{u}_r$$

Esaminiamo il flusso del campo elettrico E attraverso questa superficie, Φ_E; chiediamoci quanto vale il campo elettrico della carica q, esso, $\vec{E}$, vale $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\vec{u}_r$, dove r è la distanza generica di un punto dalla carica e $\vec{u}_r$ è quel versore orientato radialmente in senso uscente dalla carica.

Il campo da carica puntiforme è un campo a simmetria radiale e in tutti i punti di una qualsiasi superficie sferica posta a distanza r dalla carica il campo ha lo stesso valore perché r è il medesimo.

Vediamo il valore, direzione e verso del campo in corrispondenza della superficie Gaussiana S che abbiamo tracciato, una sfera.



Il campo $\vec{E}$ in un punto qualsiasi, avrà un certo modulo e sarà diretto radialmente verso l'esterno.

Il versore $\vec{u}_N$ in un punto qualsiasi è radiale e orientato verso l'esterno della superficie.

Dunque abbiamo che:

$$\vec{E}\cdot\vec{u}_N \underset{\text{si identifica con}}{\equiv} \overset{\text{modulo di } \vec{E}}{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}$$

ed è costante su tutta la superficie, perché la superficie sferica ha r costante.

Il calcolo del flusso di E è dunque:

$$\phi_E = \oint \vec{E}\cdot\vec{u}_N\, dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\oint dS$$

questa è la somma di tutte le infinitesime dello superficie, estesa a tutta la superficie, ovvero tutta la superficie della sfera S: $S = 4\pi r^2$, area della sfera di raggio r.

$$\phi_E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 =$$

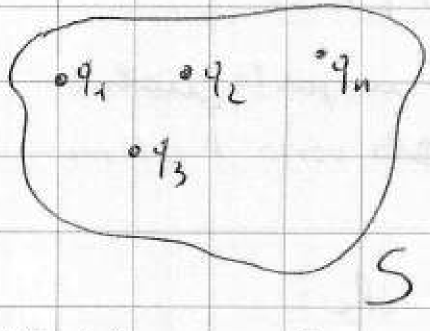
$$= \frac{q}{\varepsilon_0}$$

, indipendente dal raggio della sfera

Il flusso del campo elettrico attraverso una superficie Gaussiana di questo tipo è proporzionale per il tramite della costante $1/\varepsilon_0$ alla carica elettrica netta presente all'interno della superficie.

Questo calcolo è frutto di un caso molto semplice, tuttavia si può dimostrare che per qualsiasi distribuzione di carica contenuta all'interno di una superficie e per qualsiasi superficie chiusa e quindi di qualsiasi forma questo teorema continua a valere.

In altri termini, se considero un insieme di cariche di vario segno e di vario valore contenute all'interno di una superficie di forma qualsiasi il TEOREMA DI GAUSS assicura che



$$\Phi_E = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

il flusso del campo elettrico complessivo prodotto da tutte le cariche attraverso la superficie chiusa S è sempre uguale a $q_{totale} / \varepsilon_0$, con q_{totale} la carica netta totale all'interno della superficie.

Si parla di carica netta potendo avere sia cariche positive che negative.

Se le cariche positive e negative sono tali che la somma di queste cariche all'interno della superficie è zero allora il flusso del campo elettrico prodotto da queste cariche attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo e questo è un risultato molto importante.

Il Teorema di Gauss è intimamente legato alla legge di Coulomb, infatti il teorema di Gauss vale in questa forma

L 23.4

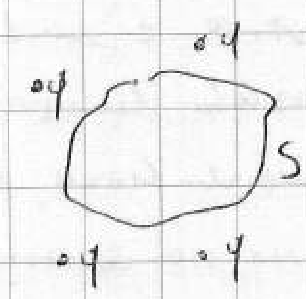
in virtù del fatto che il campo elettrico prodotto da una carica elettrica puntiforme isolata si attenua con l'inverso del quadrato della distanza dalla carica stessa, e questa è sostanzialmente il contenuto informativo della legge di Coulomb.

Quindi la legge di Coulomb e il teorema di Gauss sono due aspetti della stessa realtà fisica.

Il teorema di Gauss permette il calcolo del flusso di cariche interne all'una superficie attraverso la superficie stessa facendo la somma delle cariche.

Ma cosa succede se le cariche sono solo esterne?

Il teorema di Gauss dice che il flusso di un campo elettrico attraverso una superficie chiusa è zero se all'interno della superficie non ci sono cariche.



$\phi_E = 0$

Ora vedremo il teorema di Gauss con applicazione non a cariche puntiformi ma a una funzione densità di carica più o meno uniformemente distribuita all'interno della superficie gaussiana considerata.

Per inciso una superficie Gaussiana è una superficie teorica, che può in certi casi coincidere con una superficie reale. È in genere una struttura matematica che penso avvolge il sistema in oggetto.

LEGGE DI GAUSS

carica totale all'interno di una superficie

densità di carica, in tutto il volume

volume

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_N \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

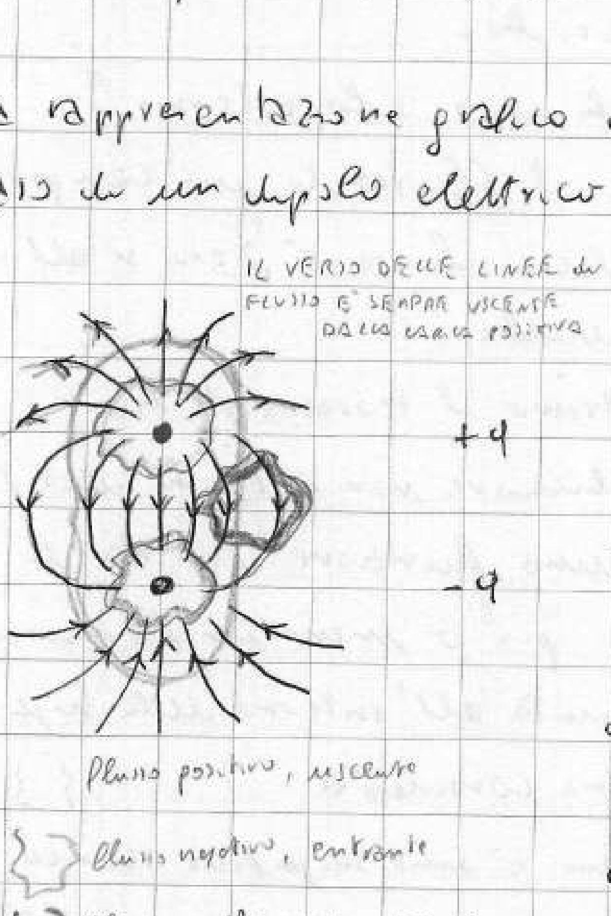
con ρ = densità di carica

L'espressione precedente della legge di Gauss, ovvero

$$\phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, dS = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, d\overset{\text{volume}}{V} \quad \text{con } \rho = \text{densità di carica}$$

dimostra che il flusso, che è un integrale di superficie è collegato ad un integrale di volume della densità di carica all'interno della superficie considerata.
Il volume di riferimento è quello contenuto all'interno della superficie, superficie arbitraria chiusa.

La rappresentazione grafica della legge di Gauss, applicata al caso di un dipolo elettrico, con l'introduzione di alcune superfici gaussiane, una che circonda la carica positiva, una quella negativa e una esterna ad entrambe le cariche.



In base al teorema di Gauss, mi aspetto che il flusso sia diverso da zero per le due superfici che hanno una carica all'interno e che sia nullo per la terza superficie, con nessuna carica all'interno.
Nel caso della carica positiva, questa è sorgente delle linee di flusso del campo elettrico. Le linee si diramano dalla carica positiva. Il verso delle linee di flusso è sempre uscente dalla carica positiva, 18'46" quindi è evidente che facendo l'integrale di superficie del vettore $\vec{E}$ scalare $\vec{u}_n$,

L. 29. 6

$\oint \vec{E}\cdot\vec{u}_n$, i due vettori $\vec{E}$ e $\vec{u}_n$ saranno tipicamente concordi e avranno un valore tipicamente positivo del flusso.
Il flusso è, dunque, positivo o uscente.
Nel caso della superficie con all'interno la carica negativa, il flusso è entrante perché le linee di flusso terminano sulla carica negativa, che può essere pensata come una specie di "pozzo" delle linee di flusso; il versore $\vec{u}_n$ relativo a questa superficie è diretto verso l'esterno e quindi il prodotto scalare con $\vec{E}$ è tipicamente minore di 1.
Il flusso è quindi negativo, in questo caso, ed è tipicamente entrante.
Nel caso della superficie che non contiene cariche, il flusso è nullo. Tante linee di flusso entrano nella superficie e tante ne escono e questo implica che il flusso totale è nullo, in accordo col fatto che all'interno della superficie la carica è nulla.
Se considero una unica superficie che racchiuda entrambe le cariche , superficie Gaussiana di forma arbitraria, ci si aspetta che il flusso totale attraverso questa superficie sia uguale alla somma delle cariche contenute in essa diviso per ε_0, ma la somma delle cariche è zero, $+q, -q$, quindi il flusso totale in questo caso è zero, anche se ci sono delle cariche interne alla superficie. In questo caso, per ogni linea di flusso uscente ho una linea di flusso entrante e quindi il flusso totale è sostanzialmente nullo.
Ora analizzeremo tre casi di calcolo di campi elettrici mediante la legge di Gauss.

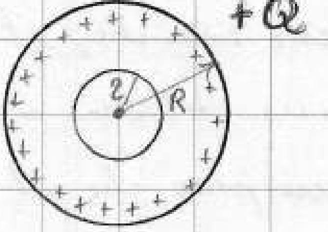
CALCOLO DI CAMPI ELETTRICI MEDIANTE LA LEGGE DI GAUSS

22'08"

nei casi:

- sfera conduttrice uniformemente carica sulla superficie
- piano uniformemente carico
- Due piani paralleli uniformemente carichi

SFERA CONDUTTRICE UNIFORMEMENTE CARICA SULLA SUPERFICIE



Sia $+Q$ una carica distribuita uniformemente sulla superficie della sfera. Esisterà quindi una densità superficiale di carica uniforme su tutta la superficie della sfera.
La configurazione è particolarmente simmetrica. Il campo elettrico, per via di simmetrie, sarà di tipo radiale perché non c'è nessuna direzione nello spazio privilegiata ad un'altra.
Il campo dipende quindi soltanto dalla distanza dal centro della sfera
Consideriamo una superficie Gaussiana di raggio variabile. Sia R il raggio della sfera, R è fisso e sia r il raggio della superficie Gaussiana, concentrica alla sfera di raggio R, $r < R$.

$$r < R \qquad \Phi_E = 0 = \underbrace{E(r)}_{\text{campo E in funzione di } r} \cdot S^{\text{superficie}}$$

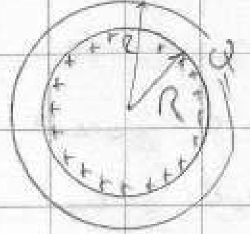
perché nella sfera di raggio r non c'è carica

Consideriamo ora il caso in cui $r > R$, ovvero la superficie

L.29.8

Gaussiana è esterna alla superficie reale su cui è collocata uniformemente una carica

$$r > R \quad \Phi_E = \oint \vec{E}\cdot\vec{u}_N \, dS = \underbrace{E(r)\cdot 4\pi r^2}_{\text{superficie della sfera gaussiana di raggio } r} =$$

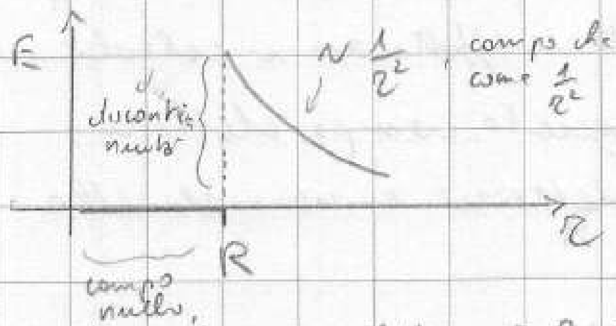


$$= \boxed{\frac{Q}{\varepsilon_0}}$$ tutta la carica per cui abbiamo

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2}$$ e questa è una importante conseguenza.

Possiamo dedurre che all'esterno di una sfera carica uniformemente il campo ha lo stesso andamento che avrebbe se la carica distribuita sulla superficie della sfera fosse concentrata al centro della sfera stessa e fosse una carica puntiforme.

L'andamento complessivo del campo in funzione di R è:



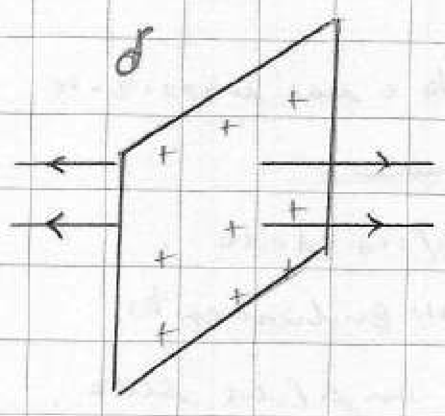
Per esercizio, determinare il potenziale relativo a questo campo.

dove il campo elettrico è 0, il potenziale è costante

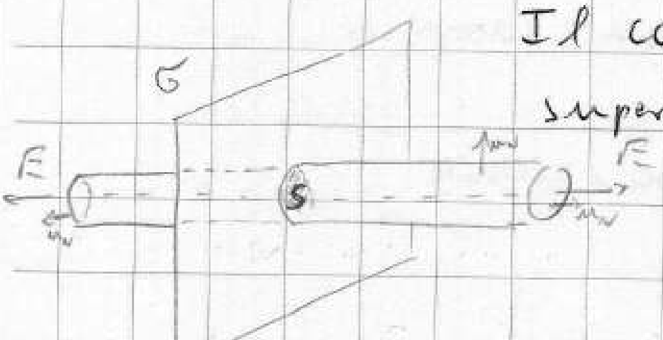
PIANO UNIFORMEMENTE CARICO

Il piano è infinito; la carica è uniforme, dunque considereremo la densità di carica, definita come il rapporto dQ/dS:

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}$$ e σ resta finito anche se la carica e la superficie tendono a infinito.



Le linee di flusso su un piano con questa distribuzione di carica possono solo essere perpendicolari al piano considerato, perché non c'è nessuna direzione privilegiata per l'inclinazione di queste linee.
La direzione è uscente.
σ è la densità di carica superficiale.
Data la simmetria della configurazione possiamo definire una superficie gaussiana opportuna che ci permetta di effettuare i calcoli relativi al valore di questo campo elettrico.
Il campo elettrico è normale alla superficie.



Sulla superficie è distribuita una densità di carica uniforme positiva σ

La superficie Gaussiana opportuna è una superficie cilindrica perpendicolare al piano.

Supponiamo di calcolare il flusso del campo elettrico E attraverso l'intera superficie Gaussiana chiusa, composta da due basi e un'area laterale (il cilindro).

L.28.10

Il campo elettrico è parallelo al versore $\vec{u}_n$ su entrambe le basi della superficie. Mentre è perpendicolare al versore u_n per quanto riguarda il contributo della superficie laterale.

I calcoli possono così essere eseguiti; si tratta di un flusso di un campo elettrico attraverso una superficie cilindrica.

La carica contenuta all'interno del cilindro corrisponde alla carica di quella sezione del ~~[illegible]~~ piano che è intercettata dal cilindro.

Supponiamo sia S la superficie delle basi.

Allora è S anche l'area della superficie del piano carico che è intercettata a mezza via del cilindro.

Il campo $\vec{E}$ punta nelle due direzioni, come la figura.

E i versori sono concordi col campo $\vec{E}$ e puntano nelle stesse direzione.

Il contributo della superficie laterale al flusso è nullo perché il campo è sempre perpendicolare al versore $\vec{u}_n$ definito sulla superficie laterale.

Dunque il flusso è:

$$\Phi_E = 2\int_{basi} \underbrace{E}_{\text{lo scrivo } E \text{ perché } \vec{E}\cdot\vec{u}_n = E \text{, modulo di } \vec{E}} \cdot dS = 2E\cdot \overbrace{S}^{\text{superficie } S} \overset{\text{PER IL TEOREMA DI GAUSS}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\sigma\cdot S}_{\text{la carica totale}}$$

ci attendiamo che il campo E sia uniforme su tutta la superficie, quindi è una costante ed esce dall'integrale; inoltre $\int_{basi} dS$ è la superficie S.

$2\cdot E\cdot S$ deve essere uguale per il T. di Gauss alla carica totale contenuta all'interno del volume definito dal cilindro gaussiano diviso ε_0. La carica totale è il prodotto della densità di carica per la superficie, ovvero $\sigma\cdot S$, con S che è uguale all'area

1.29.11

~~distanza~~ sulle basi del cilindro. Le due aree si semplificano ed abbiamo per risultato, in modulo

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

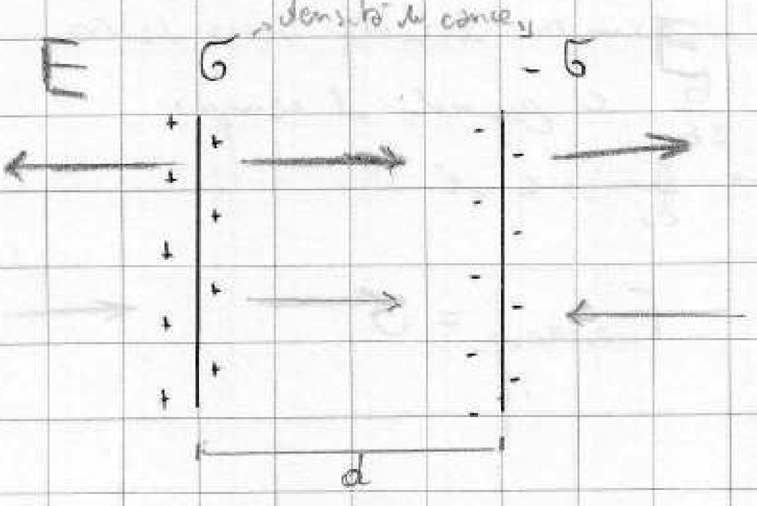
Campo elettrico prodotto da un piano infinitamente ~~carico~~ esteso, carico in modo uniforme sulla superficie è un campo che non dipende dalla distanza di un punto dalla superficie.

E' un campo uniforme e questo è un modo per produrre campi elettrici uniformi.

Se la carica fosse stata negativa, il discorso avrebbe avuto una sola variante dovuta al fatto che il campo elettrico E prodotto dalla distribuzione di carica, sarebbe un campo entrante, un campo diretto dall'esterno verso la piastra infinita uniformemente carica per cui il piano sarebbe un attrattore per ogni carica di prova positiva posta nelle sue vicinanze.

Le linee di flusso sarebbero sempre perpendicolari al piano ma la direzione sarebbe verso il piano, sia a sinistra che a destra del piano e questo porta ad un cambiamento di segno nel calcolo dell'integrale e il flusso sarebbe negativo e il campo sarebbe negativo, con lo stesso modulo precedentemente calcolato.

DUE PIANI PARALLELI UNIFORMEMENTE CARICATI CON CARICHE OPPOSTE



$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

⟵ ⟶ linee di flusso del campo generato dalla piastra caricata positivamente

linee di flusso del campo generato dalla piastra caricata negativamente.

(due sole, bastano allo scopo).

I campi elettrici prodotti dalle due lastre sono, in modulo, identici.
Il campo prodotto dalla piastra di sinistra è presente anche a destra della piastra di destra.
Il campo prodotto dalla piastra di destra è presente anche alla sinistra della piastra di sinistra.

La situazione è che a sinistra delle due piastre abbiamo un contributo diretto verso l'asse x negativo da parte del campo prodotto dal piastra ~~con~~ carica positivamente e un contributo, di ugual segno, ma diretto nella direzione positiva dell'asse delle x prodotto dal piastra carica negativamente. Evidentemente la sovrapposizione di questi effetti dà zero.
Lo stesso identico discorso vale a destra delle due ~~[illegible]~~ piastre quindi questo significa che il campo è soltanto diverso da zero nella regione compresa tra le due piastre, dove i campi anziché sottrarsi si sommano perché sono

concordi. Ci aspettiamo che nella regione interna il campo sia dato dalla sovrapposizione dei due campi prodotti concordemente dalle due piastre, entrambi i campi diretti verso destra. Ciascuno dei due campi vale $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ e quindi il campo interno è il suo doppio, ovvero $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, cioè:

$$E_{INTERNO} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad e \qquad E_{ESTERNO} = 0$$

E è il campo elettrico

In questa configurazione si riesce a confinare in una regione di spazio limitata di larghezza, o spessore d, un campo elettrico statico; all'esterno il campo elettrico è nullo, all'interno c'è un campo ~~in~~ confinato e uniforme, perché somma di due campi uniformi. Questo è il principio di un condensatore piano, di cui parleremo nella prossima lezione.

È possibile scrivere la stessa legge (di Gauss) in forma differenziale?
La risposta è sì ed è l'inizio della prossima lezione.
↳ funzione del punto

L. 23.14

Lezione 30 CONDENSATORI; ENERGIA DEL CAMPO ELETTRICO

Prof Paolo Allia
52'03''

Legge di Gauss differenziale (leggi dell'elettrostatica - forma differenziale)

Legge dell'elettrostatica in forma differenziale

Dipolo in un campo elettrico uniforme

Condensatori (e parametro capacità)

Energia del campo elettrostatico in un condensatore (anche in ogni punto dello spazio)

Abbiamo dimostrato il teorema di Gauss che collega il flusso del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa alla carica totale contenuta nel volume racchiuso dalla superficie stessa.

Il teorema di Gauss visto è un teorema di tipo integrale.

La legge di Gauss è $\underbrace{\Phi = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, dS}_{\text{integrale di superficie}} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \underbrace{\frac{1}{\varepsilon_0} \int_v \rho \, dv}_{\text{integrale di volume}}$,

ρ è la densità di carica e v è il volume della superficie S di cui dS è un elemento infinitesimo.

Sono collegati tra di loro due integrali, uno di superficie e uno di volume e quindi questa è una legge di tipo integrale, definita su regioni macroscopiche di spazio.

Sarebbe importante tradurre questa legge in una legge differenziale cioè una legge definita punto per punto dello spazio.

Il campo elettrico è una grandezza definita punto per punto dello spazio, così come il potenziale elettrico.

Introducendo una nuova funzione dello spazio detta **divergenza** potrò essere definita la legge di Gauss in forma differenziale, che è esprimibile come di seguito.

LEGGE DI GAUSS IN FORMA DIFFERENZIALE

densità di carica che è definita in ogni punto dello spazio, per cui lo è anche la divergenza. è uno scalare

$$\text{div}\,\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$ in ogni punto dello spazio

divergenza; operatore gradiente; il gradiente è un vettore; scalare; campo elettrico

Si può dimostrare che l'espressione differenziale sopra è del tutto equivalente all'espressione integrale della legge di Gauss.

La divergenza di un vettore e, nel caso specifico del vettore E, è uno scalare.
Essa può essere espressa con le derivate parziali prime delle componenti cartesiane del vettore considerato, ovvero

$$\text{div}\,\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$ è uno scalare; il gradiente è un vettore

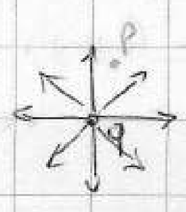
$$\vec{E} = E_x\,\vec{i} + E_y\,\vec{j} + E_z\,\vec{k}$$ campo elettrico

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$ gradiente

(N.B.: $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$ ecc, perchè sono ortogonali)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \text{div}\,\vec{E}$$

Per fissare il concetto consideriamo una carica q positiva, disegnandone le linee di forza; la carica è una sorgente di linee di flusso del campo e si può dire che le linee del flusso "divergono" dalla particella stessa.



La divergenza del campo elettrico in

corrispondenza della regione dove è concentrata la carica elettrica è diverso da zero:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\delta}{\varepsilon_0}$$

densità di carica

costante dielettrica

In un altro punto dello spazio (P), dove non è presente una carica, ma è presente il campo generato dalla carica elettrica, la divergenza è zero perché in quel punto la densità di carica è zero

È da notare che il contenuto informativo della legge di Gauss è interamente riprodotto dall'espressione differenziale vista, ovvero $\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, che è una espressione matematica ma ha anche un significato fisico

Dire che il campo elettrico ha una divergenza non nulla in corrispondenza delle cariche, laddove esiste una carica elettrica,

10'28" significa sostanzialmente dire che le sorgenti delle linee di flusso del campo elettrico sono le cariche elettriche positive.

Per le cariche elettriche negative la divergenza è zero dove la carica è zero e sarà negativa dove c'è la carica. Dunque divergenza negativa significa che le linee di flusso non divergono, ma convergono.

Le cariche negative sono punti di convergenza delle linee di flusso, una specie di pozzo dove le linee di flusso convergono e scompaiono.

Le sorgenti o i punti di terminazione delle linee di flusso del campo elettrico sono le cariche elettriche rispettivamente positive e negative. Questo è il contenuto

L.30.3

fisico della legge di Gauss.

Altra importante proprietà del campo elettrico statico è la conservatività del campo elettrico, anch'essa espressa in termini di un integrale. 11'34"

La conservatività del campo elettrico statico è:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad = \text{forma integrale}$$

integrale di linea lungo una linea chiusa

Ed in forma differenziale abbiamo:

$$\underset{\uparrow}{\text{rot}}\, \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \qquad = \text{forma differenziale}$$

↳ prodotto esterno vettoriale

operatore differenziale "rotore" del campo elettrico in questo caso; di un vettore in generale;
il rotore di un vettore è ancora un vettore

Se un campo è conservativo si può dimostrare che valgono simultaneamente le due condizioni che $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ e $\text{rot}\, \vec{E} = 0$

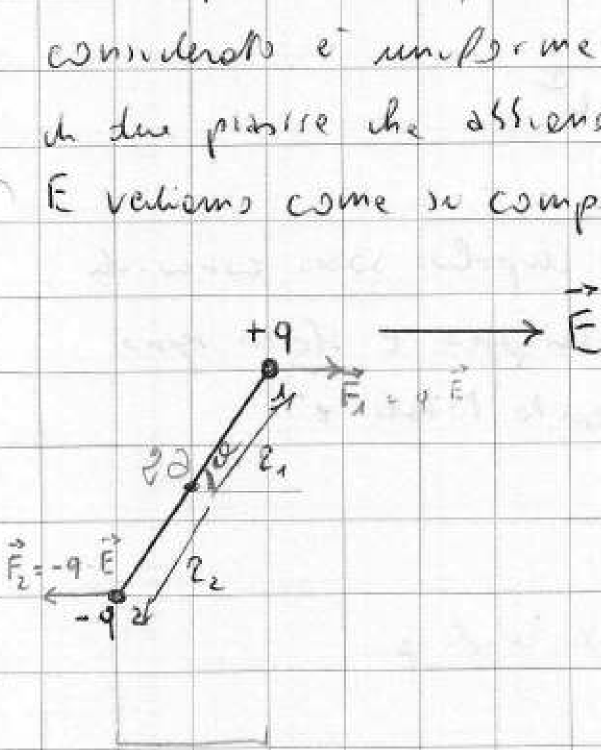
Per definizione abbiamo:

$$\text{rot}\, \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) +$$

$$+ \vec{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

DIPOLO IN UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME

Un dipolo elettrico genera intorno a sé un campo elettrico.
Vediamo ora il comportamento di un dipolo elettrico in un campo elettrico esterno.
Facendo così viene trascurato il contributo del campo del dipolo stesso, essendo molto piccolo, quindi il campo considerato è uniforme; si ricorda che è generato all'interno di due piastre che assieme cariche opposte.
E vediamo come si comporta meccanicamente il momento di dipolo.



dipolo

Il sistema è configurato come in figura, con $\vec{E}$ il campo elettrico uniforme che implica la presenza di forze sulle particelle cariche +q e -q che compongono il dipolo.
In particolare, sulla particella positiva nascerà una forza $\vec{F}_1$, con $\vec{F}_1 = q \cdot \vec{E}$ per definizione.
Sulla particella negativa si instaura una forza $\vec{F}_2 = -q \cdot \vec{E}$

La forza totale $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$.
Questo significa che il centro di massa delle due cariche non si sposta.
Esiste tuttavia un importante effetto meccanico del campo elettrico sopra un dipolo elettrico.
Il centro di massa non si sposta, ma il dipolo ruota in presenza del campo elettrico; F_1 e F_2 è una coppia di forze di cui è calcolabile il momento rispetto al centro di

massa delle due cariche, che è il centro della distanza $2a$.
$\vec{r}_1$ è la distanza della carica $+q$ dal centro e
$\vec{r}_2$ è la distanza della carica $-q$ dal centro.
I momenti di F_1 e F_2 rispetto al centro di massa sono:

$$\underbrace{|\vec{\tau}_1|}_{\text{momento di } F_1} = |\vec{r}_1 \underbrace{\wedge}_{\text{Esterno}} \vec{F}_1| = \underbrace{a}_{|\vec{r}_1|} \underbrace{qE}_{|\vec{F}_1|} \sin\vartheta$$

$$|\vec{\tau}_2| = |\vec{r}_2 \wedge \vec{F}_2| = a\, q E \sin\vartheta$$

I versi dei due vettori momento di dipolo sono concordi; entrambi perpendicolari al piano del disegno e stesso segno.
Dunque il modulo del momento totale è:

$$|\vec{\tau}| = \underbrace{2aq}_{\text{è il modulo del momento di dipolo } p} E \sin\vartheta$$

$$\boxed{|\vec{\tau}| = \underbrace{p}_{\text{momento di dipolo}} \cdot E \sin\vartheta}$$

Vettorialmente il momento meccanico sul dipolo è:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \underbrace{\wedge}_{\text{prodotto esterno}} \vec{E}$$ cioè il prodotto esterno del momento di dipolo con il campo elettrico E applicato

Il dipolo tende a orientarsi in modo tale che la posizione di equilibrio, che è raggiunta quando il momento è zero, coincide con una situazione in cui il dipolo è allineato con il campo, $\vartheta = 0$, cioè prendendo a riferimento la figura, con la carica positiva sia a destra, quello negativo a sinistra e su una retta orizzontale.

$-q$ •——• $+q$ $\vec{E}$ → $\vartheta = 0$

Esiste un'altra posizione di equilibrio, equivalente e con $\vartheta = \pi$ (180°), poiché $\sin\vartheta = 0$, ma è un equilibrio instabile, al contrario del precedente, che è stabile.

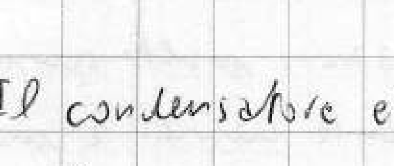
In questa seconda posizione la carica positiva è a sinistra e quella negativa è a destra

$+q$ •——• $-q$ $\vec{E}$ → $\vartheta = \pi = 180°$

Quindi il dipolo in un campo elettrico statico tende ad allinearsi in virtù del campo, per effetto della presenza del campo applicato.

IL CONDENSATORE

Il condensatore è l'insieme di due conduttori caricati con qualunque carica, in modo che ci sia una differenza di potenziale tra i due conduttori.



ΔV è la differenza di potenziale tra i due conduttori carichi.

L'insieme di due conduttori carichi separati dal vuoto e da un isolante viene denominato condensatore.

È interessante notare che

carica di uno dei due conduttori

$$\frac{Q}{\Delta V} = \text{costante}$$

d.d.p.

che dipende dalla geometria del sistema e viene denominata capacità del sistema.

Dunque la capacità del sistema, il condensatore, è una costante, data da:

$$\frac{Q}{\Delta V} = C$$ o come è spesso scritto $$\frac{Q}{V} = C$$

Q → carica di uno dei due conduttori

ΔV → d.d.p.

V → è comunque la d.d.p. tra i due conduttori che compongono il condensatore, o piastre, come vengono chiamati i due conduttori.

CAPACITÀ DI UN CONDENSATORE

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \frac{1\,C}{1\,V} = 1\,F \quad \text{(Farad)}$$

$$\underset{\text{d.d.p.}}{\Delta V} = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

integrale di linea del campo elettrico dalla piastra A alla piastra B su un qualsiasi percorso.

La differenza di potenziale si calcola con l'integrale di linea del campo elettrico dalla piastra A alla piastra B su un qualsiasi percorso che connetta le due piastre.

Calcolo di una capacità in una configurazione molto semplice con due conduttori piani uniformemente carichi e indefiniti, con le cariche di stesso valore, ma segno opposto.

La distanza tra i due piani è d.

L'area considerata è S.

La capacità C è definita come:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$ e, nel nostro caso,

$$\Delta V = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d$$

σ → densità superficiale di carica

La carica totale Q presente sulla

L. 30.8

superficie S del condensatore è data da:

$$Q = \sigma^{\text{estremo}} \cdot S$$ e, a questo punto la capacità è data da

$$C = \frac{\sigma \cdot S}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d}$$

e la capacità dipende dalla geometria del condensatore, dalla superficie e dalla distanza delle piastre.

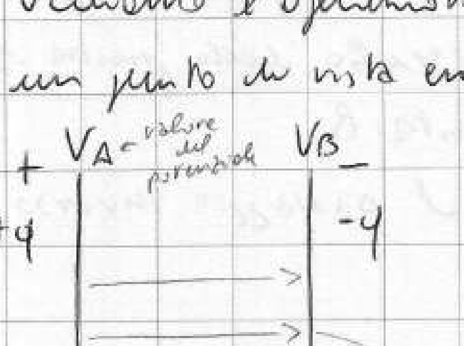
CAPACITA' DI UN CONDENSATORE PIANO

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d}$$

IN UN CONDENSATORE SFERICO O CILINDRICO L'ESPRESSIONE SARA' DIVERSA, MA COMUNQUE APPARIRANNO LE GRANDEZZE GEOMETRICHE CHE DEFINISCONO L'INSIEME DELLE DUE ARMATURE DEI DUE CONDUTTORI CHE COSTITUISCONO IL CONDENSATORE.
(N.B. in alcuni casi fra i due conduttori viene messo un dielettrico)

Vediamo l'operazione di carica di un condensatore da un punto di vista energetico

36'20"



$$V_A - V_B = E \cdot d > 0$$

$V_A > V_B$, le due piastre sono ad un potenziale diverso.
Le linee di forza vanno sempre dal potenziale più alto a quello più basso.

d.d.p = $V_A - V_B$

Supponiamo di continuare a caricare il condensatore per mezzo di un circuito, circuito che non dettagliamo.

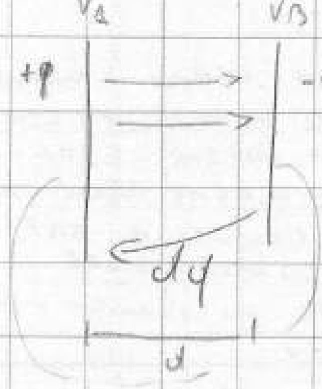
In altri termini supponiamo di aumentare la carica positiva e aumentare, ovviamente, in valore assoluto, la carica sull'altra faccia del condensatore.

In altri termini, se ad un certo istante di tempo le due cariche sono $+q$ e $-q$, ad un certo istante successivo le cariche saranno aumentate di un dq, in quanto stiamo caricando.

$+q \rightarrow +q + dq$ elemento incrementale di carica

$-q \rightarrow -q - dq$

Questo implica sostanzialmente che un elemento di carica dq è transitato dalla piastra caricata negativamente ed è andato a collocarsi sulla piastra caricata positivamente.



Questo tipo non può avvenire spontaneamente.
Una carica dq positiva se fosse libera, spontaneamente si porterebbe dalla piastra caricata positivamente alla piastra caricata negativamente, se un dq è respinta dalla piastra A ed attirata dalla piastra B.

Quindi, spontaneamente si avrebbe il passaggio inverso, di una quantità dq da A a B.
Per caricare il condensatore faccio l'azione opposta.
C'è analogia con un campo gravitazionale nel portare una massa da una regione a potenziale minore ad una regione a potenziale gravitazionale maggiore. Cioè un innalzamento, con il compimento di un lavoro contro le forze del campo, in questo caso gravitazionale. Spontaneamente una massa tende ad andare verso una regione con un potenziale gravitazionale minore. È il campo che si incarica di questo cambiamento, di questo passaggio dinamico.

L.30.10

In senso stretto, tornando alle cariche, stiamo cercando di pompare delle cariche elettriche da una regione a potenziale minore verso una regione a potenziale maggiore.
Questo spendendo del lavoro, con un generatore di energia inserito nel circuito.
Di seguito la valutazione dell'energia con il lavoro che è necessario fare contro le forze del campo, dL, dato da:

$$dL = \underbrace{(V_A - V_B)}_{\text{potenziale}} \, dq$$

, ovvero il potenziale per la carica, la carica elementare che viene spostata, quindi anche il lavoro è elementare. Questo lavoro fatto contro le forze del campo accresce l'energia potenziale del sistema. E l'aumento dell'energia è uguale al lavoro.

$$\underset{ddp}{V_A - V_B} = \frac{q}{C}$$ per definizione di capacità

$$dU = dL = \frac{q}{C} dq$$

↓ incremento di energia potenziale del sistema

E per ottenenere l'energia potenziale del condensatore carico occorre integrare il dU:

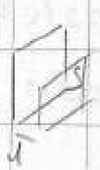
$$U = \int_0^Q \frac{q}{C} dq =$$ da una carica iniziale che è 0 a una carica totale Q.

$$= \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} CV^2 \quad [\text{Joule}]$$

Un condensatore carico è un accumulatore di energia potenziale di un sistema elettrostatico.
Energia potenziale è accumulata nel condensatore.

Valutiamo ora la densità di energia, l'energia per unità di volume del condensatore, u.

$$U = \frac{1}{2} C V^2$$



vol = $S \cdot d$

$$u = \frac{U}{Vol.}$$

$$u = \frac{1}{2} \overset{\frac{\varepsilon_0 S}{d}}{C} \underbrace{V^2}_{E \cdot d} \cdot \frac{1}{Sd} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon_0 S/d \cdot E^2 d^2}{S d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

ddp tra le piastre di un condensatore

è uno scalare

$$\underset{\left[\frac{J}{m^3}\right]}{u} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$ → è uno scalare

densità di energia associata alla configurazione vista.

NON DIPENDE DALLE CARATTERISTICHE GEOMETRICHE DEL SISTEMA MA DIPENDE UNICAMENTE DALL'INTENSITA' DEL CAMPO ELETTRICO PRESENTE NEL CONDENSATORE

energia per unità di volume

Questo risultato ha validità generale in ogni punto dello spazio con un campo elettrico uniforme

Un campo elettrico implica l'esistenza di energia.
Un campo elettrico è la sede di un campo di densità di energia.
Caratteristica questa non solo dei campi di tipo statico ma anche di tipo dinamico.

Fine trattazione campo elettrico statico
Prossima lezione la corrente elettrica: moto, lento, di cariche elettriche in un conduttore

Testi: D. Halliday R. Resnick Fondamenti di Fisica, casa ed. Ambrosiana

Lezione 31 CORRENTE ELETTRICA; LEGGE DI OHM

Prof. Paolo Allia
52'06"

Corrente elettrica
Densità di corrente (vettore)
Legge di Ohm (Espressione e giustificazione microscopica)
Effetto Joule (collegato al passaggio di corrente elettrica in un mezzo resistivo o passivo)
Legge di Joule e Potenza dissipata

Tratteremo la corrente elettrica stazionaria; un caso di cariche in moto, la corrente elettrica è un insieme di cariche in moto.
Le proprietà del campo rimarranno le stesse nel caso in cui le cariche avranno un moto uniforme, senza accelerazioni e con velocità basse, cioè piccole rispetto alla velocità della luce nel vuoto

La corrente elettrica è un concetto connesso al trasporto di carica. Carica che è associata a particelle elementari quali elettroni, protoni, ioni in generale.
I più piccoli portatori di carica sono gli elettroni ed essi sono i portatori di carica nella grande classe di materiali cosiddetti conduttori metallici.
Nei conduttori metallici il trasporto di carica è assicurato dagli elettroni.
Esistono sistemi fisici con altri tipi di portatori di carica elettrica, negativa o positiva.

Corrente elettrica è constatare che in un mezzo conduttore ad un certo tempo un certo numero di cariche ha attraversato una sezione del mezzo.
La corrente elettrica è definita come il rapporto tra la carica che ha attraversato una certa sezione di un mezzo in cui

ci sia trasporto di carica e il tempo necessario all'attraversamento della sezione.

CORRENTE ELETTRICA

CARICA e CORRENTE SONO LEGATE TRA DI LORO IN MODO ESTREMAMENTE DEFINITO

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}}$$

derivata della carica in funzione del tempo

$$1\,A = \frac{1\,C}{1\,s}$$

[è uno scalare, rapporto tra una carica e un tempo]

Ampere, 1 Coulomb al secondo

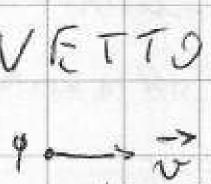
Ampere e Coulomb sono connessi, come si può vedere dalla relazione.
Nella realtà è più facile definire l'unità di misura della corrente piuttosto che quella delle cariche.

L'Ampere gioca un ruolo più centrale rispetto al Coulomb nelle misurazioni. Il Coulomb, nella pratica, diventa una unità di misura derivata dalla conoscenza della unità di misura dell'Ampere.
L'Ampere è uno scalare, rapporto tra carica e tempo.
La corrente elettrica è connessa al concetto di trasporto di cariche elettriche lungo una certa direzione.

Possiamo dunque introdurre il concetto di un vettore, il vettore **densità di corrente** che è intimamente collegato alla corrente elettrica per come la corrente elettrica è stata definita, ovvero $I = dq/dt$.

VETTORE DENSITA' DI CORRENTE

7'00"



Particelle con la stessa carica in moto con una certa velocità costante e uguale per tutte, velocità $\vec{v}$.
Sia n il numero di particelle per unità di volume.

Quindi n è dimensionato alle dimensioni di una lunghezza alla meno tre perché è un numero per unità di volume.
Definiamo un vettore $\vec{j}$ come prodotto di n per q per $\vec{v}$:

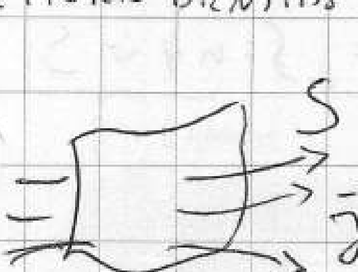
$$\vec{j} = n q \vec{v}$$

, il vettore $\vec{j}$ è il vettore densità di corrente elettrica. 3'15"

È il prodotto della carica di ogni particella per la velocità di ogni particella per il numero di particelle per unità di volume che si trovano nel mezzo considerato.
Vediamo la relazione tra il vettore densità di corrente e la corrente elettrica definita in precedenza.
Alla luce del concetto di flusso di un vettore, focalizzandoci sul flusso del vettore campo elettrico abbiamo, in questo caso, un campo vettoriale che è il campo di velocità delle particelle e quindi abbiamo un campo vettoriale che è il campo definito dal vettore densità di corrente che potrebbe variare da punto a punto dello spazio.

$$\underbrace{I}_{\text{corrente elettrica}} = \underbrace{\int_S \vec{j} \cdot \vec{u}_N \, dS}_{\text{flusso del vettore densità di corrente elettrica attraverso una qualsiasi superficie } S}$$

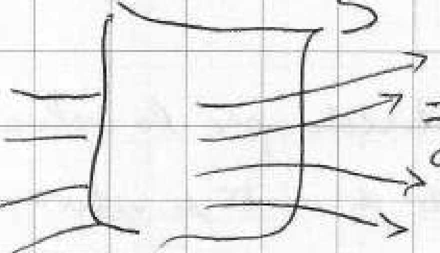
LA CORRENTE ELETTRICA I È DEFINITA COME IL FLUSSO DEL VETTORE DENSITÀ DI CORRENTE ELETTRICA ATTRAVERSO UNA QUALSIASI SUPERFICIE S.



Quindi, avendo una qualunque superficie S, genericamente non piana, e avendo delle linee di flusso del vettore $\vec{j}$, a cui corrisponde un trasporto reale di

L 31.3

massa e di carica, quindi un flusso di natura fluidodinamica, ~~e detto~~ questo flusso è la corrente elettrica che sta fluendo attraverso la superficie.
Quindi la carica che per unità di tempo sta attraversando la superficie. 10' 45"



$$\boxed{\begin{aligned}\vec{j} &= n q \vec{v} \\ I &= \int_S \vec{j}\cdot\vec{u}_n\, dS\end{aligned}}$$

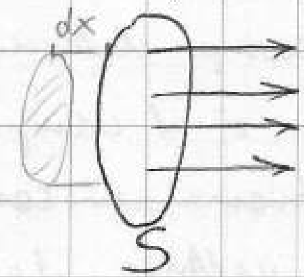
LA DIREZIONE DI $\vec{j}$ È LA DIREZIONE DELLA VELOCITÀ DELLE PARTICELLE.

Si può dimostrare che

$$I = \int_S \vec{j}\,\vec{u}_n\, dS$$ ricordando che

$$I = \frac{dq}{dt}$$ carica che passa nell'unità di tempo la superficie considerata.

Supponiamo che il campo vettoriale $\vec{j}$ sia un campo uniforme e



la superficie S sia perpendicolare a j. S è una superficie piana.
Allora possiamo scrivere che

$$I = \frac{dq}{dt} = j\cdot S$$

$\vec{j}\cdot\vec{u}_n = j$ perché $\vec{j}$ e $\vec{u}_n$ sono paralleli; j è costante sulla superficie quindi esce dall'integrale ma il modulo di j è n q v, quindi

$$\frac{dq}{dt} = j\cdot S = \underbrace{n q v}_{\text{modulo } j}\, S$$

moltiplicando ambo i termini per dt abbiamo

numero di particelle per unità di volume

$$dq = n q S \underbrace{v\, dt}_{dx}$$ che è una identità corretta e deriva da $\int_S \vec{j}\,\vec{u}_n\, dS$

L'analisi dell'espressione dice che abbiamo della carica q distribuita con una certa densità che occupano un volume che è dato da $S\, v \cdot dt$, ma $v\, dt$ ha le dimensioni di una distanza, sarà un dx ed è

L.31.B

sostanzialmente l'altezza di un cilindro di base S e di altezza dx che contiene tutte e sole le particelle che nel tempo dt attraversano la sezione.
Ma se tutte le particelle, e solo quelle, attraversano la sezione in un volume cilindrico elementare di base S e di altezza dx allora il numero totale delle particelle è $n\,S\,v\,dt$; esso è il numero di particelle, adimensionato, moltiplicato per q, la carica che ogni particella porta e allora questa è la carica totale che nell'intervallo dt è passata attraverso la superficie e quindi è dq.
Questa è, in sostanza, la giustificazione dell'espressione $I = \int_S \vec{j}\cdot\hat{u}_n\, dS$, legame tra corrente e vettore densità di corrente e il legame che intercorre tra un flusso e un vettore.

Nella maggior parte dei casi pratici le particelle che conducono elettricità, tipicamente dei metalli, sono elettroni; la carica dell'elettrone è negativa ed è chiamata e, quindi nel caso di conduzione di tipo elettronico la densità di corrente è $-ne\vec{v}$, ovvero

$$\vec{j} = nq\vec{v} = -n\cdot e\cdot \vec{v}$$

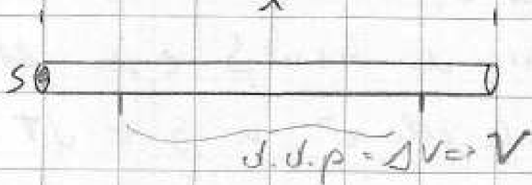
, e in questo caso la densità di corrente è antiparallela alla velocità delle particelle

movimento degli elettroni $\longleftarrow$

$\longrightarrow \vec{j}$ densità di corrente

In realtà quando diciamo che la corrente elettrica in un conduttore fluisce in una direzione stiamo implicitamente dicendo che gli elettroni stanno fluendo nella direzione opposta.

LEGGE DI OHM



Dato un filo conduttore di lunghezza l e di sezione S, con una corrente I che fluisce in esso, esiste una differenza di potenziale tra due punti del conduttore.
Tale differenza di potenziale è ΔV, che sarà da ora in poi chiamata V, $\Delta V \Rightarrow V$; V è comunque una differenza di potenziale tra due punti fissi.

→ Esiste una proporzionalità tra la d.d.p. misurata e la corrente che sta fluendo attraverso il filo conduttore.
La costante di proporzionalità tra la d.d.p. misurata e la corrente misurata prende il nome di **Resistenza** del mezzo, R.

$$V = I R$$

d.d.p tra due punti — corrente — Resistenza, è funzione della temperatura; dipende dalla geom. del circuito e del tipo del conduttore

La resistenza del mezzo è una funzione della temperatura, non dipende dalla tensione o dalla corrente applicata ma dipende dalla geometria del circuito, del filo e dalla struttura della materia che costituisce il conduttore.

Da misure sperimentali la resistenza di un conduttore è:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

è dunque proporzionale alla lunghezza del conduttore diviso per la sezione del conduttore con ρ costante di proporzionalità.

ρ costante di proporzionalità (rho), detta resistenza specifica o resistività

RESISTIVITÀ

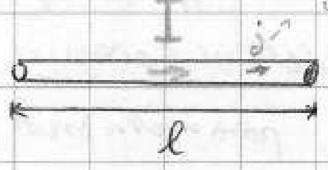
L.3.1.6

È la costante di proporzionalità, la resistività che, in funzione della temperatura è differente da materiale a materiale. 20'18''

Vedremo nel seguito una classificazione di mezzi materiali in termini della loro resistenza specifica, ovvero della loro resistività: mezzi isolanti, semiconduttori e conduttori.

Al momento stiamo trattando mezzi conduttori nei quali gli elettroni, che trasportano la carica, si muovono quasi liberamente

LA LEGGE DI OHM: FORMA MACROSCOPICA e FORMA MICROSCOPICA 22'11''



Consideriamo un tratto rettilineo di un conduttore in cui fluisce una corrente elettrica I; ha una sezione costante S e lunghezza l.

LA LEGGE DI OHM È (in forma macroscopica)

$V = IR$ e modifichiamo i parametri sulla base delle nostre conoscenze, valutando V, I e R singolarmente

d.d.p

lunghezza del tratto

$V = Ed \Rightarrow El$ vale in presenza di un campo elettrico uniforme e costante

La distanza lungo la quale misuriamo la differenza di potenziale

$I = jS$

I, intensità di corrente è data dal flusso del vettore densità di corrente attraverso la sezione del conduttore. In questo caso il vettore densità di corrente è orizzontale ed è perpendicolare alla sezione del conduttore

→ densità di corrente
→ Intensità di corrente

$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$

Resistenza
Resistività

Quindi, sostituendo V, I e R nella legge di Ohm, abbiamo

$$\underbrace{El}_{V} = \underbrace{jS}_{I}\, \underbrace{\rho \frac{l}{S}}_{R}$$

Dalle semplificazioni abbiamo una relazione del tipo

$$\underbrace{E}_{\text{campo elettrico}} = \underbrace{\rho}_{\text{resistività}}\ \underbrace{j}_{\text{densità di corrente}}$$

Legge di Ohm

che è una relazione microscopica perché E e j sono definiti punto per punto, nel materiale. È la legge di Ohm.

Questa relazione microscopica, microscopica perché E e j sono definiti, nel materiale punto per punto è una relazione fra moduli. Nella realtà sperimentale molti materiali hanno una resistenza specifica, una resistività ρ che non dipende dalla direzione del moto delle cariche e quindi questa è una legge che vale in forma vettoriale

$$\vec{E} = \rho\,\vec{j}$$

valenza in forma vettoriale della legge; si può leggere come "un campo elettrico provoca il flusso di una corrente, parametrizzata dal vettore $\vec{j}$ densità di corrente, con la resistività quale parametro di proporzionalità". La resistività è caratteristica del mezzo

Molto spesso questa legge di Ohm espressa in forma differenziale viene scritta in modo lievemente diverso, cioè:

$$\vec{j} = \sigma\,\vec{E} \quad \text{con} \quad \sigma \equiv \frac{1}{\rho}$$

sigma — conducibilità — sigma specifica

, σ è la conducibilità elettrica specifica del mezzo, inverso della resistenza specifica o resistività del mezzo.

Dunque sono equivalenti le due espressioni della legge di Ohm:

$$V = I R \qquad \text{e} \qquad \underbrace{\vec{j} = \sigma\,\vec{E}}_{\text{...proporzionalità tra campo elettrico } E \text{ e densità di corrente}}$$

(Ricapitolando la legge di Ohm)

LEGGE DI OHM

$V = R I$

costante, resistenza elettrica, nel rapporto tra la tensione V e la corrente elettrica I: $\frac{V}{I} = R$

Unità di misura Ohm

$$\boxed{1\ \Omega} = \boxed{\frac{1V}{1A}}$$

dimensioni della resistenza elettrica, un potenziale diviso una corrente

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$

densità di corrente

controparte microscopica della legge di Ohm: la densità di corrente è proporzionale al campo elettrico $\vec{E}$ tramite la conducibilità elettrica

La resistenza R si misura in Ohm, Ω;
la resistività ρ si misura in Ohm · metro, $\Omega \cdot m$;
la conducibilità σ si misura in Ohm^{-1} · metro^{-1}, $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$

INTRO MOTO DEGLI ELETTRONI IN UN METALLO

Una linearità tra densità di corrente e campo elettrico 23'30"
sembra essere anomala e sotto certi aspetti questo è vero.
La legge di Ohm è esprimibile come $\vec{j} = \sigma \vec{E}$, $\vec{j}$ è definito
anche come $\vec{j} = n q \vec{v}$, q è la carica delle particelle, n è
il numero di particelle per unità di volume e $\vec{v}$ è la velocità
delle particelle, di tutte le particelle, ovvero:

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$
$\vec{j} = n q \vec{v}$

e questo equivale a dire che la velocità delle particelle sono proporzionali al campo elettrico, che è una forza diviso una carica.

$\vec{v} \propto \vec{E} \propto \vec{F}$

se $\vec{v}$ è proporzionale a $\vec{E}$ e $\vec{E}$ è proporzionale a $\vec{F}$ allora $\vec{v}$ è proporzionale a $\vec{F}$

Quindi la velocità di scorrimento delle particelle cariche che generano la corrente elettrica, in un conduttore sembra essere proporzionale semplicemente ad una forza.
Le leggi fondamentali della meccanica dicono che una forza che agisce su una particella libera genera una accelerazione,

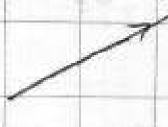
non mantiene la particella a velocità costante.
Come detto prima, in un conduttore ci sono elettroni che sono quasi liberi; se fossero liberi si dovrebbero muovere a velocità costante in assenza di forze esterne e muoversi di moto uniformemente accelerato in presenza di una forza esterna.
Un campo elettrico accelera evidentemente una carica, un elettrone in una cavità in cui venga fatto un vuoto ultra alto. Cosa che avviene in un qualunque schermo televisivo a tubo catodico. Cioè un campo elettrico accelera effettivamente gli elettroni.
In un metallo possono essere definiti o modellizzati elettroni liberi che però non accelerano in presenza del campo elettrico. Questo sembra essere un controsenso. In realtà non lo è se facciamo una analogia di una caduta di un grave in un fluido viscoso, ad es. un paracadute nell'atmosfera, in cui vi è una accelerazione iniziale ma, dopo un certo tempo, l'accelerazione diminuisce e la caduta è a velocità costante. Questo è dovuto alla resistenza dell'aria, agli attriti, forze di tipo viscoso.
La forza di tipo viscoso è di tipo dissipativo; è una forza di attrito e, come tutte le forze di attrito, non è una forza conservativa. L'energia meccanica viene dissipata dal sistema e si trasforma in energia di altro genere, tipicamente energia termica.
La stessa cosa avviene per la conduzione elettronica nei metalli, di cui vedremo una semplice modellizzazione. 34'32"
L.31.10

Dunque il problema è che sapendo che un campo elettrico implica accelerazione di cariche ma nella realtà nei conduttori gli elettroni "liberi" non accelerano.

Questo è analogo ad una caduta di un grave in un fluido viscoso dove intervengono forze di attrito con trasformazione di energia meccanica in calore.

MOTO DEGLI ELETTRONI IN UN METALLO

Il moto degli elettroni in un metallo non è rettilineo, ma è di tipo frastagliato con cambi totali di direzione e velocità tali che nell'analisi del problema occorre introdurre le medie delle grandezze.



Un elettrone in un metallo non si muove mai così

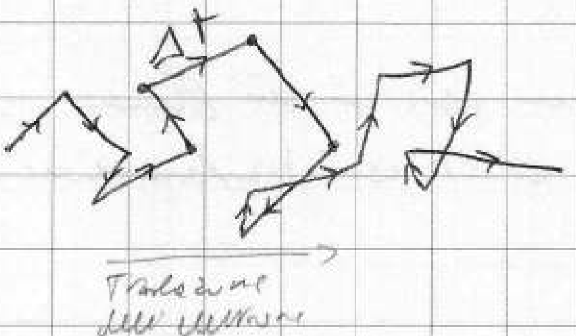
Moto sperimentalmente reale di un elettrone in un reticolo.
C'è una apparente velocità di deriva da sinistra verso destra; che è il moto di elettrone in un campo elettrico

Quello che avviene realmente è causato da imperfezioni del reticolo, urti con le impurità del metallo, l'agitazione termica del reticolo: il moto dell'elettrone è una successione di moti liberi, interrotti in modo casuale e molto repentino da eventi di collisione tra l'elettrone con il reticolo imperfetto.

Lo stato di moto dell'elettrone cambia radicalmente ad ogni urto. È come se venisse completamente cancellata la memoria dinamica dell'elettrone. Dopo l'urto l'elettrone emerge con una velocità che non ha nulla a che fare

L.31.11

con la velocità che aveva in precedenza e che è del tutto casuale. Come è casuale il tempo tra un urto e quello successivo.



Sia Δt il tempo tra un urto e il successivo, che varia in modo casuale.

Tra un urto e l'altro si può dedurre che l'elettrone si comporta in modo del tutto libero, per cui la velocità è:

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{v_0}}_{\text{velocità iniziale dell'elettrone con cui è emerso dall'urto precedente}} \overbrace{-\frac{e}{m}\vec{E}}^{\text{accelerazione}} \cdot \Delta t$$

Dove:

v_0 è la velocità iniziale dell'elettrone con cui è emerso dall'urto precedente; poiché l'elettrone è libero, avrà una accelerazione dovuta al campo elettrico.

$-\frac{e}{m}\vec{E}$ è l'accelerazione dell'elettrone "libero" dovuta al campo elettrico.

$\vec{F} = ma \Rightarrow a = \frac{\vec{F}}{m}$ → la forza applicata è di tipo elettrico ed è $-e \cdot \vec{E}$ (la carica dell'elettrone); m → massa

$a = -\frac{e}{m}\vec{E}$

per cui

$-\frac{e}{m}\vec{E} \cdot \Delta t$ sarà la velocità nel tempo Δt. E $\vec{v}$ sarà dunque la velocità finale nel tratto considerato, in cui si considera l'elettrone libero.

Si deve ora analizzare il moto dell'elettrone in un intervallo lungo rispetto all'intervallo Δt.

L'intervallo Δt fra due urti successivi sono molto corti, dell'ordine di 10^{-10}, 10^{-12} secondi.

Quindi valuteremo quello che succede in tempi molto più lunghi di questo, sono cioè tempi di ordine macroscopico.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \frac{e}{m}\vec{E}\,\Delta t$$

$\langle \Delta t \rangle = \tau$ (tau), τ è il tempo libero medio; è cioè il valor medio dei Δt, dei tempi "liberi" dell'elettrone. τ è il valor medio della distribuzione dei tempi

n.b.: $\langle\ \rangle$ è il valor medio

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_0 \rangle - \frac{e}{m}\vec{E}\langle \Delta t \rangle$$

queste sono grandezze costanti

valor medio della velocità, dopo un lungo intervallo di tempo.

$\langle \vec{v}_0 \rangle = 0$ perché nel lungo periodo si equivalgono le velocità iniziali $+v_0$ con quelle $-v_0$, la loro media è quindi 0.

Quindi è definita la velocità media dell'elettrone come velocità di deriva, $\vec{v}_d$, data da:

$$\vec{v}_d = \langle \vec{v} \rangle = -\frac{e}{m}\vec{E}\cdot\tau$$

Possiamo dire che tutti gli elettroni si muovono in modo casuale, ma facendo una media temporale tutti appaiono muoversi con una velocità comune a tutti che è la loro velocità di deriva, che non è una velocità istantanea, ma è una velocità mediata.

A questo punto possiamo scrivere

dell'elettrone — costante di proporzionalità

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \underbrace{-ne}_{q}\,\vec{v}_d = \boxed{\frac{ne^2}{m}\tau}\,\vec{E}$$

, che è una relazione tra densità di corrente e campo elettrico, è lineare.

1.31.13

In $\vec{j} = \frac{ne^2}{m} \tau \vec{E}$ la costante di proporzionalità, che è $\frac{ne^2}{m}\tau$, dipende dalla carica, dalla massa dell'elettrone e dal numero di cariche nel materiale e del tempo libero medio

Per analogia con l'espressione

$\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$\vec{j}$ → densità corrente elettrica
σ → conducibilità
$\vec{E}$ → campo elettrico

allora una rozza espressione della conducibilità elettrica è:

$$\sigma = \frac{ne^2}{m}\tau$$

σ → conducibilità
τ → tempo libero medio

Allora un metallo è tanto più un buon conduttore quanti più elettroni di conduzione ha, ma soprattutto quanto più è maggiore il tempo libero medio, che dà proprio l'informazione sugli intervalli di tempo entro i quali il moto dell'elettrone è effettivamente libero, senza essere disturbato dagli urti reticolari.
Se il moto è impedito τ è corto e quindi σ basso, conducibilità bassa e quindi resistività alta ed abbiamo in questo caso un materiale ad alta resistenza specifica.

POTENZA DISSIPATA DA UN CONDUTTORE

Questo argomento è correlato al precedente perché se applico una forza ad un insieme di particelle cariche, queste non ~~ac~~ accelerano quindi l'energia spesa non va ad accelerare le ~~cariche~~ particelle, quindi non va ad incrementarne l'energia cinetica, ma viene trasferita in qualche altro modo.

In un mezzo dissipativo come in questo caso l'energia per unità di tempo (la potenza) viene dissipata in calore. Un conduttore al passaggio della corrente dissipa energia elettrica sotto forma di calore e si scalda; questo è il principio di funzionamento delle stufe come elettriche. L'effetto considerato è l'effetto Joule

$$P = \underset{\text{scalare}}{\vec{F} \cdot \vec{v}_d} = -e\vec{E} \cdot \vec{v}_d$$ Potenza associata al moto di un singolo elettrone

$\vec{v}_d$: velocità di deriva degli elettroni

↳ potenza è un lavoro fatto per unità di tempo

$$P_{vol} = -ne\vec{E} \cdot \vec{v}_d = \underset{\text{scalare}}{\vec{j} \cdot \vec{E}}$$ Potenza per l'insieme di elettroni

perché $\vec{j} = -ne\vec{v}_d$

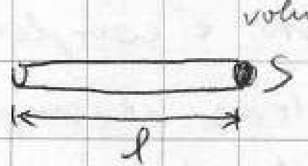
↳ POTENZA PER UNITÀ DI VOLUME, perché n è un numero per unità di volume

$P_{vol} = jE$ se $\vec{j}$ e $\vec{E}$ sono paralleli.

Allora in un conduttore di sezione S di lunghezza l

$$P = P_{vol} \cdot \underbrace{S \cdot l}_{\text{volume}} = jESl$$

la potenza effettiva è la potenza volumica per il volume, $P = P_{vol} S l = jESl$ e



raggruppando in un altro modo:

$$P = (jS)(El) = \qquad = IV$$

, ma $jS = I$ flusso del vettore intensità di corrente e El è la differenza di potenziale V, ai capi del conduttore

Dunque la potenza che viene dissipata in calore, legge di Joule.

$$\boxed{P = IV}$$ LEGGE DI JOULE, potenza dissipata in calore.

1.31.15

LEGGE DI JOULE

$$P = I \Delta V = \underbrace{R I^2}_{\text{espressione alternativa della legge di Joule}}$$

$P = VI$

$V = IR$ per la legge di Ohm

$\Rightarrow P = I^2 R$ valida solo per i materiali dove vale la legge di Ohm.

$$1 W = 1 A \cdot 1 V$$

W: unità di misura della potenza

Questa è, a tutti gli effetti, una potenza elettrica perduta.
Il moto degli elettroni in un metallo non è un moto libero, può essere assimilato ad un moto di tipo viscoso con un certo attrito. La resistenza elettrica è una misura macroscopica di questo attrito.
Microscopicamente abbiamo visto le cause dell'attrito e comunque della dissipazione dell'energia in questa continua successione di urti da parte degli elettroni con perdita di memoria da urto a urto.
Quindi, in conclusione il fenomeno osservato è completamente dissipativo; in presenza di una forza esterna, il campo elettrico, gli elettroni non accelerano in stato stazionario ma hanno una velocità di deriva uguale per tutti che è una velocità media proporzionale al campo elettrico.
In queste condizioni il lavoro delle forze elettriche non va ad incrementare l'energia cinetica ~~[illegible]~~ delle particelle portatrici di carica. L'energia elettrica viene interamente convertita in energia termica e trasferita al materiale entro cui si muovono le cariche; il circuito si riscalda, che può essere un

L 31.1C Detto positivo o negativo a seconda dell'applicazione cui il fenomeno è applicato.

LEZIONE 32 IL CAMPO MAGNETICO STATICO

Prof. Paolo Alba
51' 17"

Il campo magnetico statico
Forza di Lorentz
Moto di cariche elettriche in campo magnetico uniforme
Unità di misura del campo magnetico
Forze magnetiche e correnti elettriche

INTRODUZIONE

Il campo elettrico è prodotto da cariche elettriche ed ha effetti misurabili su cariche elettriche.
La forza di tipo elettrico esercitata da un campo elettrico sopra una carica qualsiasi è ottenuta moltiplicando il valore del campo in un determinato punto per il valore della carica stessa.
La forza di tipo elettrico si applica su cariche sia in moto che in quiete rispetto al campo elettrico in questione.
Ma l'interazione di cariche elettriche con campi non si esaurisce con la trattazione del solo campo elettrico.
Il campo magnetico, intimamente connesso con il campo elettrico, è un'altra forma di interazione tra particelle esistente in natura. Effetti magnetici sulla materia sono noti dall'antichità dovuti all'esistenza di materiali magnetici.
L'ago di una bussola è una striscia oblunga di materiale magnetico che interagisce con le linee di flusso di un campo, il campo magnetico generato dalla Terra.
Gli studi del campo elettrico e del campo magnetico portarono a pensare che ci fosse qualche punto di contatto tra i due fenomeni.
Non si può definire una origine comune in senso stretto, ma ci saranno effettivamente dei punti di contatto estremamente stretti tra le sorgenti del campo elettrico e le sorgenti del campo magnetico.
Ci saranno analogie e ci saranno diversità.

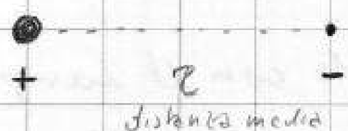
Nella trattazione di campo elettrico e magnetico statico avremo minor analogie rispetto alle difformità.
Il campo elettrico statico e il campo magnetico statico tendono a comportarsi in modo diverso e ad essere descritti in modo diverso.
Le analogie e il legame tra i due campi sarà evidente quando saranno esplicitamente introdotti gli effetti dipendenti dal tempo.

LE FORZE ELETTRICHE E LE FORZE GRAVITAZIONALI DELLE PARTICELLE

Sono state discusse le forze gravitazionali e le forze elettriche.

Nel trattare le forze elettriche è stato trascurato l'effetto delle forze gravitazionali tra le particelle.

Consideriamo dunque il caso della forza attrattiva fra un protone e un elettrone, studiando l'ordine di grandezza delle interazioni elettriche e delle interazioni gravitazionali.
Il risultato sarà che l'interazione gravitazionale è effettivamente trascurabile.
Dunque vediamo un atomo di idrogeno in presupposta ipotesi di staticità, calcolandone la forza di tipo elettrico e la forza di tipo gravitazionale, intercorrente tra protone ed elettrone conoscendone le cariche e le masse.



$r \simeq 5.3 \cdot 10^{-11}$ m

$F_e \simeq 8.1 \cdot 10^{-8}$ N (Forza elettrica attrattiva, legge di Coulomb)

$F_g \simeq 3.7 \cdot 10^{-47}$ N (Forza gravitazionale di mutua attrazione, legge di Newton)

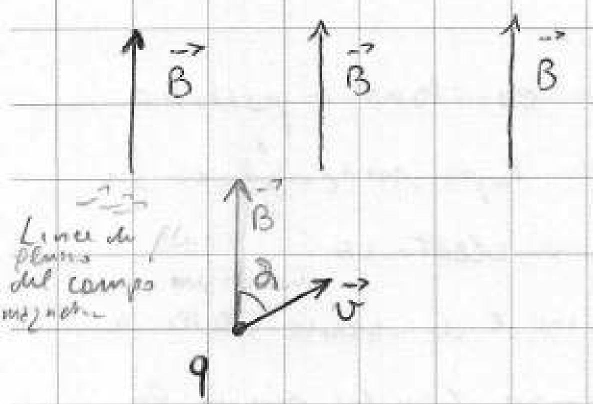
La differenza di ordine di grandezza tra le due forze è enorme, circa 32 o 33 ordini di grandezza. Le forze gravitazionali sono trascurabili.

Dal calcolo delle forze elettriche e delle forze gravitazionali in ambito di un atomo di idrogeno è evidente che le forze gravitazionali sono trascurabili.
Non lo sono quando si ha a che fare con masse di dimensioni molto grandi, planetarie, galattiche ed in assenza di forti interazioni di tipo elettrico.
La materia in stato aggregato è tendenzialmente neutra dal punto di vista elettrico e quindi sono trascurabili le forze di tipo elettrico a favore delle forze gravitazionali.

Accanto alle forze di tipo elettrico esistono o possono esistere in linea di principio forze di tipo magnetico su particelle dotate di massa e di carica elettrica.
Vediamo come una particella dotata di massa e di carica elettrica si comporta in un campo magnetico, non dando ancora la definizione del campo magnetico né l'origine di esso, se ne ammette l'esistenza soltanto, per ora.
Quindi ci si suppone di porci tra le espansioni polari di una calamita.
Introduciamo idealmente una singola carica di prova in una regione di spazio occupata dal campo magnetico e priva di campi elettrici (in caso contrario la carica sarebbe accelerata).
In prima approssimazione ipotizziamo uniforme il campo magnetico nella regione in analisi, cosa che è comunque sperimentalmente fattibile.
La carica in quiete in un campo magnetico uniforme resta in quiete. Questo significa che non esiste nessun campo di forze sulla carica elettrica in quiete immersa in una regione di spazio dove sappiamo esistere una entità chiamata campo magnetico.
L.32.3 La cosa cambia se la carica viene posta nella regione, con una

velocità iniziale.
Allora vediamo effetti diversi consistenti dell'instaurazione di forze sulle particelle cariche in moto e queste forze sono legate alla intensità di quello che chiamiamo campo magnetico presente nella regione considerata.
La situazione sperimentale è piuttosto complessa, alla fine si giunge alla Legge di Lorentz.

LEGGE DI LORENTZ



$\vec{B}$ è un campo magnetico uniforme, in una regione di spazio. In figura le linee di flusso (alcune) parallele.
Sia q una particella carica con velocità $\vec{v}$ che ad un certo istante si trovi nel campo magnetico. Sia $\vec{F}$ la forza di Lorentz, che è esercitata sulla particella in moto. Essa è proporzionale alla carica ed alla sua velocità esterno campo magnetico $\vec{B}$.

$$\vec{F} = q \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B}}_{\text{esterno}}$$

FORZA DI LORENTZ (espressione vettoriale) La forza vettoriale è data da un prodotto vettoriale tra velocità e campo magnetico

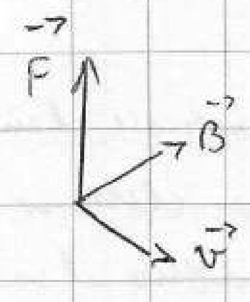
In modulo:

$$|\vec{F}| = q v B \sin\alpha$$

Forza di Lorentz, modulo.

con α angolo compreso tra la direzione della velocità e la direzione del campo magnetico.

La direzione della forza è ortogonale al piano formato da $\vec{v}$ e $\vec{B}$. Il verso di questa forza è determinato dalla cosiddetta regola della mano destra e quindi è un verso uscente del piano del disegno. Questo vale per q con carica positiva.



La forza $\vec{F}$ è dunque sempre perpendicolare alla velocità istantanea della particella.

$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ $\quad \vec{F} \perp \vec{v}$; calcoliamo il lavoro elementare dL compiuto da una forza di questo genere.

$dL = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \underbrace{\vec{v}\, dt}_{d\vec{l}} = \overset{\text{perché } \vec{F} \cdot \vec{v} = 0}{0}\, dt$ essendo $\vec{F} \perp \vec{v}$

spostamento elementare

dL vale 0 per tutti gli istanti di tempo; per tutti i punti della traiettoria vale una relazione di questo genere e quindi il lavoro di una forza di tipo magnetico su una particella carica che si muove con una certa velocità entro un campo magnetico di forza è zero.

LA FORZA DI TIPO MAGNETICO NON LAVORA SOPRA UNA PARTICELLA IN MOTO.

COSA SIGNIFICA QUESTO?

Se il lavoro di una forza è zero, l'energia cinetica del corpo sottoposto a questa forza non cambia.

$L = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2)$ Relazione tra lavoro e energia cinetica

se l'oggetto parte da fermo, l'energia cinetica è:

$K = \frac{1}{2} m v^2$

v.a. 8.3

L'energia cinetica di una particella carica immersa in un campo magnetico non viene modificata mai.

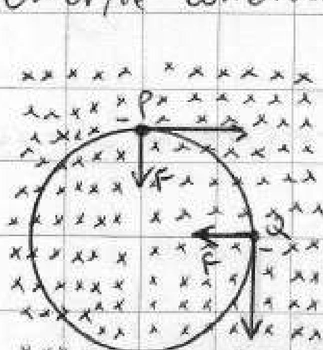
FORZA DI LORENTZ $\quad \vec{F} = q\vec{v} \wedge \overset{\text{campo dell'onda}}{\vec{B}}$

$\vec{F} = q\vec{E}$ è paragonata alla forza di tipo elettrico che potrebbe esistere

sulla particella se esistesse anche un campo elettrico nella stessa regione di spazio.
Questa seconda forza, $\vec{F} = q\vec{E}$, è in grado di cambiare l'energia cinetica della particella. Abbiamo visto che un campo elettrico compie un lavoro sopra una particella, ne modifica il modulo della velocità.
Un campo magnetico non lavora sulla particella e la sua velocità viene quindi modificata in un modo caratteristico.
Se esiste una forza esisterà una accelerazione e la velocità verrà modificata ma l'energia cinetica non lo è.

$\vec{v}$ cambia $\quad v^2$ non cambia (l'energia cinetica è proporzionale a v^2)

Allora siamo in presenza di una forza che fa cambiare il vettore velocità senza farne cambiare il modulo.
Una forza così è una forza di tipo centripeto.
È una forza che fa compiere ad un corpo un moto circolare uniforme, in cui la velocità vettoriale cambia istante per istante perché la direzione del moto cambia e c'è una accelerazione data dalla forza centripeta.
Il modulo della velocità v^2 non varia, non varia l'energia cinetica



In figura la traiettoria di una particella carica negativamente che è sottoposta ad un campo magnetico che è entrante nel piano del disegno (x indica che le linee di flusso sono entranti nel piano del disegno). Il vettore velocità è , in due istanti.

L 32 6

Calcoliamo la velocità di rotazione della particella negativa un elettrone.

$$F = \overset{\text{carica dell'elettrone}}{e} v B = \frac{m v^2}{r}$$

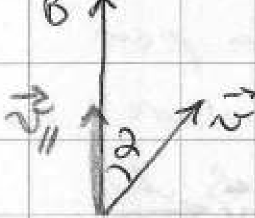
in modulo — il seno dell'angolo fra v e B è 1

$$r = \frac{m v}{e B}$$

$v = \omega r$ (velocità angolare) quindi $r = \frac{m \omega r}{e B} \Rightarrow \omega = \frac{e B}{m}$ (modulo della velocità angolare)

Per una carica qualsiasi $\omega = \frac{q B}{m}$

CASO IN CUI IL VETTORE VELOCITÀ E IL VETTORE CAMPO MAGNETICO B NON SONO ORTOGONALI



Si scompone il vettore v in due componenti, una componente perpendicolare a $\vec{B}$ e una parallela a $\vec{B}$ e vediamo l'effetto del campo magnetico su entrambe le componenti. Sia q la particella carica, la forza di Lorentz è:

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

per $\vec{v}_{\parallel}$ il modulo di $\vec{F}$ è zero, perché $\vec{v} \wedge \vec{B}$ è zero

Sulla componente parallela la forza $\vec{F}$ è nulla.
La forza si esercita sulla particella che ha velocità $\vec{v}$ soltanto per la componente perpendicolare.
Dunque r, il raggio di "girazione", il raggio della circonferenza descritta dalla particella è

$$r = \frac{m v_{\perp}}{q B}$$

La velocità angolare della particella è

$$\omega = \frac{v_\perp}{r}$$

Il periodo di rotazione, ovvero il tempo necessario a percorrere un intero giro è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{v_\perp} \quad \text{Periodo di rotazione}$$

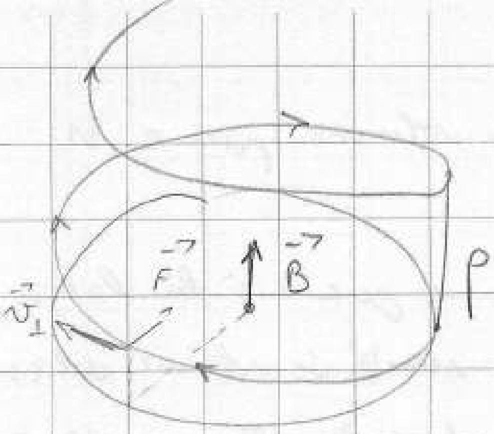
E tutto questo è la dinamica della velocità perpendicolare.
Esiste comunque una velocità parallela che rimane inalterata in presenza del campo magnetico $\vec{B}$.
Allora quello che possiamo dire è che l'effetto di B è quello di alterare la velocità perpendicolare in direzione ma non in modulo e la particella compie in piani perpendicolari a $\vec{B}$ delle traiettorie di tipo circolare, ma c'è una componente di spostamento nel verso di B che resta totalmente inalterato. Questo significa che la traiettoria della particella non è una circonferenza piana ma è una traiettoria elicoidale.

Questa elica ha un passo p che vale:

$$p = v_\parallel T = v_\parallel \frac{2\pi}{v_\perp} r \quad \text{passo dell'elica}$$

e sostituendo r, abbiamo

$$p = v_\parallel \cdot \frac{2\pi}{\cancel{v_\perp}} \cdot \frac{m \cancel{v_\perp}}{qB} = \frac{2\pi m v_\parallel}{qB} \quad \text{passo dell'elica}$$



UNITA' DI MISURA DEL CAMPO MAGNETICO

$$F = qvB \sin \alpha \qquad \left[\frac{N}{Cms^{-1}}\right] = [T] \quad \text{TESLA}$$

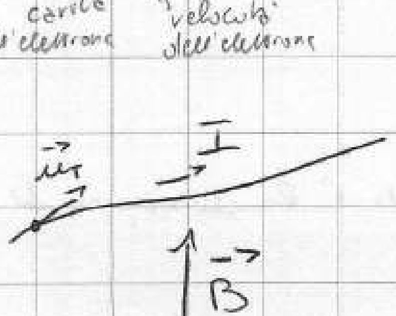
$$\frac{N}{Cms^{-1}} \Rightarrow \text{TESLA } (T)$$

EFFETTO DI UN CAMPO MAGNETICO SU UNA CORRENTE

Una corrente è determinata dall'insieme di cariche elettriche che si stanno muovendo in un conduttore con una certa velocità di deriva uguale per tutte.
Se il conduttore è di tipo ohmico le cariche elettriche sono elettroni: il caso trattato di seguito è questo in particolare.
Sia f_1 una forza di tipo magnetico, quando un conduttore percorso da corrente stazionaria si suppone sia introdotto in una regione in cui è presente un campo magnetico B.

$$f_1 = \underbrace{-e}_{\text{carica dell'elettrone}} \underbrace{\vec{v}}_{\text{velocità dell'elettrone}} \wedge B$$

Sia $\vec{u}_\tau$ il versore tangente al conduttore in ogni suo punto e il conduttore sia immerso in un campo magnetico B. Nel conduttore ci saranno



L.32.9

un numero di elettroni per unità di volume pari a n.

$$\underset{\text{forza per unità di volume}}{f_{vol}} = n f_e = \underbrace{-ne\vec{v}}_{\vec{j}} \wedge \vec{B}$$

e questa è la forza per unità di volume del conduttore dovuta alla presenza di un numero n di elettroni per unità di volume che stanno fluendo nel conduttore con velocità $\vec{v}$ uguale per tutti.

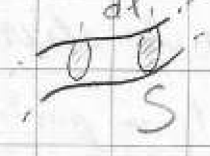
La presenza del campo magnetico dà origine a questa particolare forza f_{vol}.

Si nota che $-ne\vec{v}$ è il vettore densità di corrente $\vec{j}$.

Quindi la forza per unità di volume f_{vol} è:

$$f_{vol} = \vec{j} \wedge \vec{B}$$

Qual è quindi la forza che si esercita sopra un volume elementare del conduttore? Allunghiamo un particolare del conduttore:



il volume elementare dV del cilindretto è:

$$dV = S\,dl$$

La forza totale su questo tratto, dF è:

$$dF = \overset{\text{è un vettore}}{\vec{j}} \wedge B \underbrace{S \overset{\text{è uno scalare}}{dl}}_{dV,\ \text{volume elementare}}$$

$\vec{j} = j\,\vec{u}_T$ la direzione di $\vec{j}$ in ogni punto è la direzione di $\vec{u}_T$.

abbiamo

$\vec{j}\,dl = j\,dl\,\vec{u}_T = j\,d\vec{l}$ perché l'elemento vettoriale di

L.32 13

spostamento lungo una qualsiasi traiettoria è proprio lo spostamento elementare dl diretto tangenzialmente alla traiettoria stessa, quindi $d\vec{l}$ è $dl\,\vec{u}_T$.

Quindi abbiamo

$$d\vec{F} = \overset{\text{scalare}}{j}\ \overset{\text{scalare}}{S}\ d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

$$(\underbrace{d\vec{l} \wedge \vec{B} \neq \vec{B} \wedge d\vec{l}}_{\text{cambia verso}})$$

Nell'ipotesi che la densità di corrente sia uniforme lungo tutto il conduttore e sia perpendicolare al conduttore stesso, come visto in precedenza, allora jS è il flusso di j e quindi è la intensità di corrente I, cioè:

$$d\vec{F} = jS\ d\vec{l} \wedge \vec{B} = I\ d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Quindi qualsiasi tratto di conduttore percorso da corrente sottoposto ad un campo magnetico che in generale può non essere uniforme, cioè può anche dipendere da punto a punto nello spazio, è sottoposto ad una forza elementare $d\vec{F}$ vettoriale che dipende dalla reciproca direzione tra $d\vec{l}$, parallelo alla tangente al circuito in quel punto e B stesso.

Per ottenere la forza sull'intero circuito occorre integrare e fare un integrale di linea (complicato) dell'espressione. Il risultato è:

$$\vec{F} = I \cdot \int_l d\vec{l} \wedge \underbrace{\vec{B}}_{\text{esterno}}$$

non dipende dal tempo

→ FORZA TOTALE IN UN CONDUTTORE PERCORSO DA CORRENTE STAZIONARIA I È UGUALE ALL'INTEGRALE DI LINEA SOPRA IL CONDUTTORE DEL PRODOTTO VETTORIALE $d\vec{l} \wedge \vec{B}$

Il fatto che il campo B agisce sulle cariche in moto implica che il campo B agisca sulle correnti.

Una forza di tipo elettrico è una forza sopra una carica elettrica in quiete o in moto dovuta al campo elettrico e così via.
Il campo elettrico stesso è generato da cariche, quindi, il campo è generato da cariche, il campo esercita una forza su altre cariche.
Non abbiamo idea di come sia generato il campo magnetico B ma sappiamo che ha un effetto sulle cariche in moto rispetto al campo magnetico ed ha effetto su correnti elettriche.

Ci chiediamo quali siano le sorgenti del campo magnetico. Se un campo magnetico ha effetto su correnti, è possibile che le correnti elettriche siano le sorgenti del campo magnetico? ... prossima lezione

L. 32. 12

LEZIONE 33 SORGENTI DEL CAMPO MAGNETICO; FORZE TRA CORRENTI

Prof Paolo Alliа
48'34"

Relazione tra corrente elettrica e campo magnetico
Legge di Ampère - Laplace
Esempio di un caso di circuito indefinitamente rettilineo
Legge di Biot - Savart
Forze tra correnti

Nella scorsa lezione è stato introdotto il concetto di campo magnetico verificandone l'effetto su cariche elettriche in moto.
Un campo magnetico produce forze misurabili su correnti elettriche all'interno di conduttori.
Ci siamo chiesti se esiste una relazione ancora più profonda tra campo magnetico e correnti elettriche per analogia con i fenomeni di tipo elettrico in cui il campo elettrico è generato da cariche elettriche e sia responsabile di forze elettriche su altre cariche elettriche.
In effetti un campo magnetico può essere prodotto da una corrente elettrica.
Una corrente elettrica fa deflettere un ago di bussola esattamente come un campo magnetico.
Questo implica che una corrente elettrica deve essere responsabile della generazione nel suo intorno di una modificazione dello spazio che è chiamato con il nome di campo magnetico. Resta aperta la questione se i campi magnetici che si trovano all'intorno e all'interno di materiali magnetizzati, come i magneti permanenti, abbiano o meno la stessa origine.
Questo non è molto chiaro in quanto in un materiale magnetizzato, apparentemente non vi è nessuna corrente elettrica che fluisca.

Ma vedremo che l'origine microscopica del campo magnetico è sempre la stessa: i campi magnetici sono prodotti da correnti elettriche.
Il tipo di legge che mette in relazione una corrente elettrica che fluisce entro un conduttore con il campo magnetico generato dalla corrente stessa nelle vicinanze del conduttore è una legge sia sperimentalmente che teoricamente molto complessa.

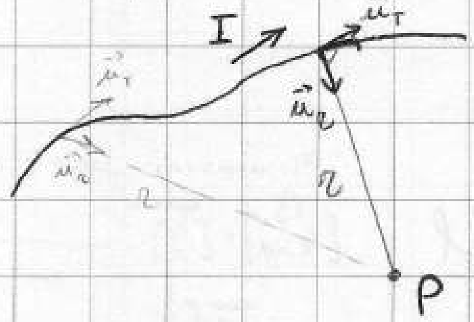
Un campo magnetico $\vec{B}$ statico è generato da correnti stazionarie, non dipendenti dal tempo.

Il campo magnetico è un campo vettoriale funzione del punto, come modulo, direzione e verso e la legge che lo descrive deve essere una legge vettoriale.
Ma, al contrario del campo gravitazionale e di quello elettrico dove le sorgenti possono essere assimilabili a punti, nel caso del campo magnetico le sorgenti sono correnti elettriche che non sono puntiformi ma al minimo possono essere filiformi. Questo rende più complessa la definizione della legge

LEGGE DI AMPÈRE - LAPLACE

È la legge attraverso la quale, in linea di principio, è possibile ottenere il campo magnetico in un punto qualsiasi prodotto da una corrente stazionaria che fluisce lungo un conduttore di forma qualunque.
Dunque la situazione è quella di un conduttore qualsiasi percorso da una corrente I stazionaria, con un punto P

esterno al conduttore. Ci chiediamo quale sia il contributo nel punto P al campo magnetico generato dalla corrente I.



Si considera un tratto infinitesimo del conduttore, tratto connotato da un versore $\vec{u}_T$ che è tangenziale al conduttore.
Si congiunge il punto di linea con P e sia r la distanza tra P e il punto del conduttore

Introduciamo un secondo versore che è diretto lungo r e il verso esce dal conduttore e va verso il punto P, sia $\vec{u}_r$ questo versore.
Mantenendo fermo P, gli elementi diversi del conduttore avremo in genere sia $\vec{u}_T$ che $\vec{u}_r$ diversi.
Si dimostra sperimentalmente che il contributo infinitesimo al campo magnetico $\vec{B}$ dovuto all'elemento considerato è $d\vec{B}$ ed è proporzionale alla corrente che fluisce nel conduttore ed al rapporto con al denominatore r^2 e al numeratore un prodotto vettoriale dei due versori introdotti:

esterno, senso dell'angolo

$$d\vec{B} \underset{\text{proporzionale}}{\propto} I \frac{\vec{u}_T \wedge \vec{u}_r}{r^2} \underset{\text{lunghezza del tratto considerato}}{dl}$$

(L'ORDINE DEI VERSORI È QUESTO; UNA INVERSIONE COMPORTEREBBE UN CAMBIO DI SEGNO.)

Questa legge vale solo in forma locale, in forma differenziale, poiché $d\vec{B}$ non è il campo complessivo nel punto P, ma è il contributo elementare al campo totale dovuto al solo elemento considerato del conduttore. Si deve poi sommare su tutto il resto.
Di seguito la legge di Ampère-Laplace con la costante di

6.33.3

proporzionalità scritta in modo canonico in termini di una costante universale μ_0 (mu) (permeabilità magnetica del vuoto).

Legge di Ampère - Laplace

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{\overset{\text{esterno, sinistra}}{\vec{u}_t \wedge \vec{u}_r}}{r^2}\, dl$$

$\frac{\mu_0}{4\pi}$ vale 10^{-7} unità del S.I.

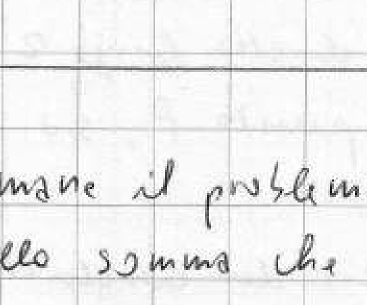
Dimensione della formula: $\underset{\text{campo magnetico}}{\underset{[\text{Tesla}]}{B}} = [A] \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}^2}$

con $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ è dimensionato: $[\mu_0] = \frac{[B][L]}{[\text{Corrente}]}$

e μ_0 è misurato in $\frac{T \cdot m}{A}$ cioè $\frac{\text{Tesla} \cdot \text{m}}{\text{Ampere}}$

Rimane il problema di ottenere il campo B integrato, ottenuto dalla somma che è un integrale di linea su tutti gli elementi di un circuito.

Supponiamo che il conduttore faccia parte di un circuito chiuso di forma arbitraria, in cui scorre una corrente I.



CONDUTTORE IN CIRCUITO CHIUSO

Il nostro interesse è quello di calcolare in un punto P il campo $\vec{B}$ totale, che sarà dato da una relazione di questo genere:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\overset{\text{"vettore"}}{\vec{u}_t \wedge \vec{u}_r}}{r^2}\, dl$$

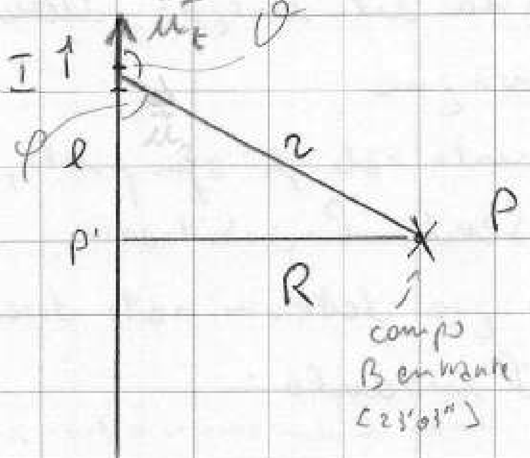
integrale di linea su un percorso chiuso

Il prodotto vettoriale $\vec{u}_t \wedge \vec{u}_r$ deve essere fatto punto per punto, valutare la distanza del punto P dal punto considerato e integrare su tutto il conduttore per avere $\vec{B}$, in modulo, direzione e verso.

L.33.4

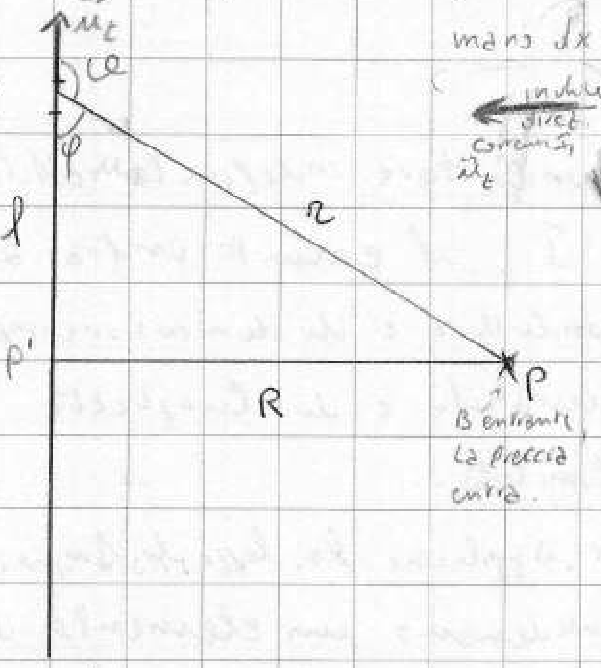
I calcoli da fare hanno una difficoltà notevole. Di fatto vengono effettuati calcoli numerici.
In caso di particolari simmetrie è possibile ottenere abbastanza rapidamente delle informazioni sul valore del campo B e sulle linee di forza (o linee di flusso) del campo B attorno al conduttore.

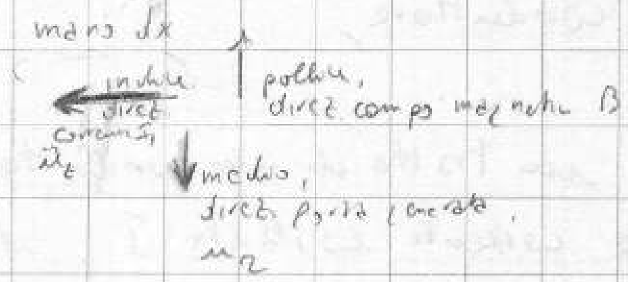
Esempio: un tratto di un conduttore indefinito rettilineo percorso da corrente costante I; il circuito andrà a chiudersi all'infinito. Il conduttore è di dimensione infinitesima, trascurabile e di lunghezza illimitata.



Per applicare la legge di Ampère-Laplace consideriamo un elemento del conduttore, posto ad una distanza r dal punto P, mentre R ne è la distanza dal conduttore.
Sia l il tratto di conduttore che separa il punto P' dall'elemento di corrente.
Dobbiamo applicare la legge di Ampère-Laplace.
Il versore $\vec{u}_t$ è diretto lungo il filo e non varia mai punto per punto.
Il versore $\vec{u}_r$ invece varia sempre.
Siano ϑ e φ due angoli complementari, come in figura.
Questi due angoli possono parametrizzare il sistema.
Possiamo a questo punto individuare la direzione e il verso del campo B integrato prodotto nel punto P.
Il prodotto vettoriale tra $\vec{u}_t$ e $\vec{u}_r$ sarà un vettore che sarà perpendicolare al piano. Il verso si ottiene con la

regola della mano destra.
Il pollice della mano destra punta all'interno della lavagna, del disegno, quindi tutti i contributi al campo B prodotti nel punto P sono contributi entranti e paralleli tra di loro; il campo magnetico B integrato è entrante. 23'03"





Il campo B entra nel piano del disegno, della lavagna.
Questo vale per ogni punto, essendo P arbitrario, almeno nel semispazio destro. Avendo già determinato direzione e verso di $\vec{B}$, ne calcoliamo il modulo:

modulo del prodotto vettoriale di due versori = 1·1· sen dell'angolo

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta}{r^2}\, dl$$

perché è costante

non è chiuso perché il circuito non è chiuso, lo è all'infinito

Consideriamo ora alcune relazioni tra θ, r e dl.
Al variare dell'elemento dl varia sia r che θ.
Sussistono le seguenti relazioni relative al triangolo rettangolo:

$R = r \sin\varphi$; poiché $\varphi = \pi - \theta$ allora

cateto

$R = r \sin\theta$

$$l = R \operatorname{cotang} \varphi$$, ma avendo dl, ~~abbiamo~~ dobbiamo differenziare la relazione, ottenendo:

$$dl = -R \cdot \frac{1}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = \frac{R\, d\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

poiché $\varphi = \pi - \vartheta$

Per cui abbiamo:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\boxed{\ }}^{\boxed{\ }} \frac{\sin\vartheta}{R^{\cancel{2}}}\, \cancel{\sin^2\vartheta} \cdot \frac{\cancel{R}}{\cancel{\sin^2\vartheta}}\, d\vartheta =$$

da distanza — da distanza

R è una costante, è la distanza di P dal conduttore

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

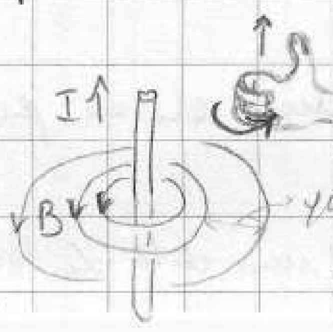
vale 2

La variabile è cambiata, da un elemento di linea ad un angolo.
L'angolo ϑ varia: se l'elemento di linea è preso lontano, a $+\infty$, allora ϑ tende sempre di più a π. Se l'elemento di linea è preso verso $-\infty$, ϑ tende a 0.
Quindi gli estremi di integrazione diventano 0 e π

In questa particolare configurazione di corrente il campo magnetico B dipende dall'inverso della distanza dalla corrente.

33'' Il campo B si ottiene in funzione della distanza del punto P dalla retta su cui giace la corrente e si ottiene come $1/R$. Questo per quanto riguarda il modulo.

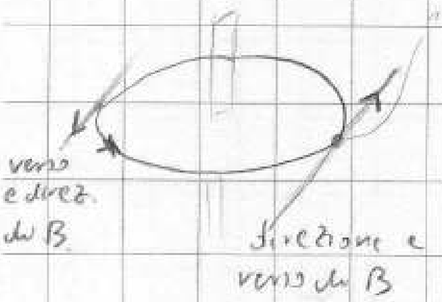
Di seguito alcune linee di flusso o di forza di un campo B prodotto da una corrente stazionaria che fluisce in un conduttore



← quella distanza aumenta

Le linee di flusso sono circonferenze concentriche, la cui distanza aumenta all'aumentare della distanza dal conduttore.

Ogni circonferenza è la traccia di un cilindro di flusso che circonda la corrente.
La direzione ed il verso del campo B in ogni punto dello spazio



In questo punto il campo è tangente alla linea di flusso e il verso è lo stesso della linea di flusso.
Un ago di bussola si dispone in modo tangenziale ad una data circonferenza che rappresenta una linea di flusso di B, il luogo dei punti ad ugual valore di B nell'intorno della corrente di B.
Le linee di flusso di B sono evidenziate dalla regola della mano destra, come in figura, vanno nel senso di chiusura della mano, col pollice verso il verso della corrente.

LEGGE DI BIOT-SAVART

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot \vec{u}_\tau$$

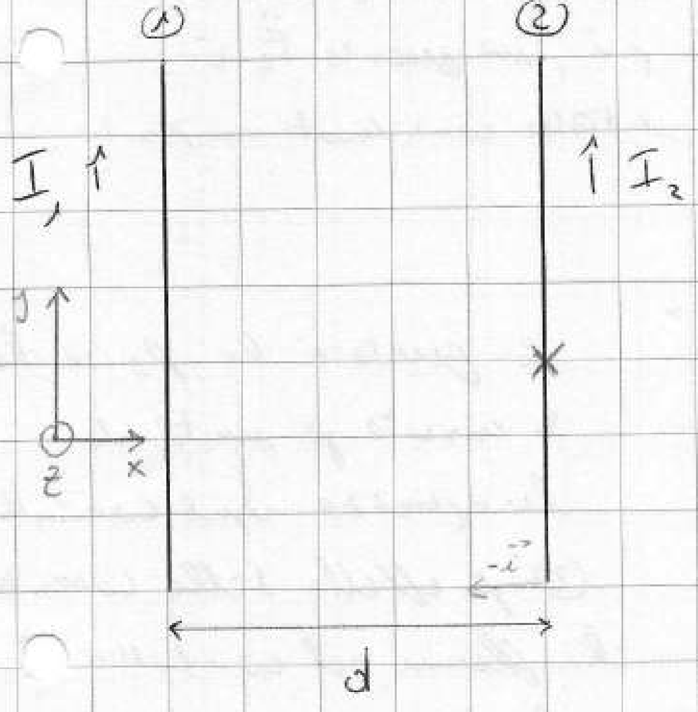
$\vec{u}_\tau$ → versore sempre tangente alla circonferenza di raggio r centrata sul conduttore
r → distanza del punto dalla corrente rettilinea.

DUE FILI RETTILINEI PERCORSI DA CORRENTE

La legge di Biot-Savart esplica il campo magnetico prodotto da un filo rettilineo percorso da corrente nelle sue vicinanze.
Su un filo un campo magnetico ha una azione fisica che produce una forza.
Vediamo il caso di due fili rettilinei posti ad una certa distanza

L. 33.8

tra di loro. Dunque siano (1) e (2) due fili di lunghezza



infinita paralleli e a una distanza d; in essi, rispettivamente scorre una corrente I_1 e I_2. Le due correnti sono diverse in valore ma hanno lo stesso senso di percorrenza. C'è una dinamica tra i due fili con delle forze tra di loro.

Sul filo (2) esiste una forza $\vec{F}_2$ data da:

$$\vec{F}_2 = I_2 \int d\vec{l}_2 \wedge \overset{\text{esterno}}{\vec{B}_1}$$

↳ campo che si trova in corrispondenza del conduttore (2) e che è prodotto dalla corrente I_1 nelle sue vicinanze

Supponendo che non ci siano altre sorgenti di campo, il campo $\vec{B}_1$ è il campo prodotto dalla corrente I_1 nelle sue vicinanze. Il valore di $\vec{B}_1$ si ricava con la legge di Biot-Savart:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}(-\vec{k}) \quad ; \quad d\vec{l}_2 = dl_2\, \vec{j}$$

↳ versore dell'asse z ↳ segno meno perché entrante ↳ distanza ↳ versore di y

Per cui

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} I_2 \int \underbrace{\vec{j} \wedge -\vec{k}}_{=-\vec{i}}\, dl_2 =$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \underbrace{\int dl_2}_{\text{integrale di linea}} \vec{i}$$

di dl_2 = lunghezza considerata del tratto conduttore;

dl_2 sarebbe infinitamente grande essendo infinito il conduttore - Interessa ... per unità di lunghezza

1339

Sia $\vec{f}_2$ la forza $\vec{F}_2$ per unità di lunghezza: $\vec{f}_2$ è quella che ci interessa di più, in quanto $\vec{F}_2$ è infinita essendo il conduttore e il tratto considerato infiniti.
Dunque $\vec{f}_2$ è così definita:

$$\vec{f}_2 \equiv \frac{\vec{F}_2}{\underbrace{L_2}_{\text{unità di lunghezza}}} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\,\vec{i}$$

e questa è la forza che si esercita per unità di lunghezza sul conduttore ② per effetto della corrente che fluisce nel conduttore ① e che genera un campo magnetico (B_1) in corrispondenza del secondo conduttore.

Le considerazioni fatte valgono simmetricamente per il conduttore ① che sente il campo generato dalla corrente nel conduttore ② come una forza.
Rifacendo i calcoli si ottiene:

$$\vec{F}_1 = +\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\cdot L_1 \cdot \vec{i}$$

e $\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$

I due conduttori si attraggono con una forza che è funzione della distanza e delle correnti. Le forze sono uguali in modulo ma opposte in segno. Se nei due conduttori fluissero correnti discordi, una verso l'alto e una verso il basso, i due conduttori sarebbero sottoposti a forze uguali ma opposte e repulsive.

1.33.10 Questo tipo di forze ci permetteranno di definire meglio l'Ampère.

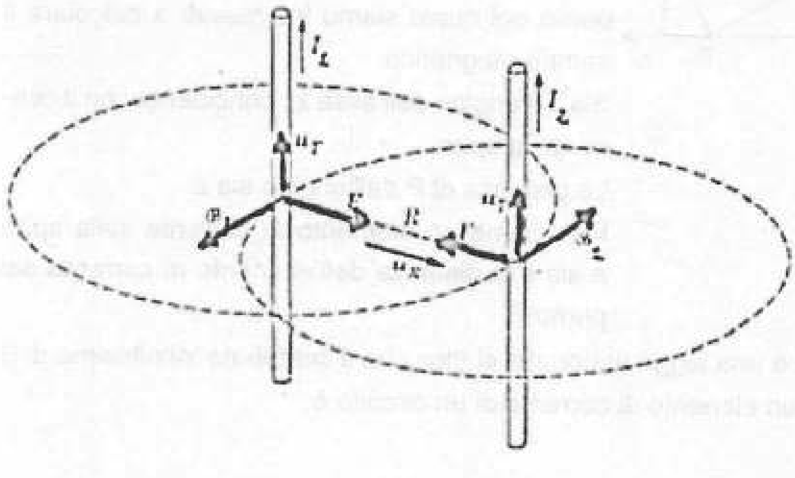
LEZIONE 34

SPIRE PERCORSE DA CORRENTI; MOMENTI DI DIPOLO MAGNETICO

Prof. Paolo Allia
50'36"

Spire percorse da correnti; Momenti di dipolo magnetico.
Definizione operativa dell'unità di misura della corrente.
Momento di dipolo magnetico.
Legge della circuitazione di Ampére.

Proseguiamo lo studio delle proprietà e degli effetti del campo magnetico statico.
Nella lezione precedente abbiamo introdotto la legge di Ampére-Laplace che ci permette di calcolare il campo magnetico B prodotto da una corrente qualsivoglia in un punto qualsiasi dello spazio.
Abbiamo visto infatti che il campo magnetico B è prodotto da correnti elettriche e che esso ha effetti dinamici, quindi esercita una forza, su correnti elettriche.
Parleremo di alcuni aspetti del campo magnetico B generato da una particolare configurazione di corrente.
In particolare analizzeremo il caso di una spira percorsa da corrente che è stessa stessa una sorgente di campo magnetico ma che è è pure soggetta a forze dovute alla presenza di campi magnetici esterni ed analizzeremo entrambi gli aspetti.
Analizzeremo il concetto di dipolo magnetico e alla fine studieremo un'altra proprietà del campo magnetico statico che va sotto il nome di Legge della circuitazione di Ampére.
Nella scorsa lezione avevamo studiato le forze prodotte da due fili di lunghezza indefinita percorsi da una corrente elettrica nello stesso verso, ovvero correnti concordi.
Le forze tra i due fili sono di tipo attrattivo se le correnti sono concordi e sono di tipo repulsivo se le correnti sono discordi.



Schematicamente si vedono le linee di forza (o linee di flusso) del campo B prodotte dalla prima e dalla seconda corrente.
La forza che avevamo discusso era f = $\frac{F}{L} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d}$, dove d è la distanza tra i fili e μ_0 è la

permeabilità magnetica nel vuoto.

I_1 e I_2 sono le due correnti. Questa formula ci permette di definire operativamente l'unità di misura della corrente elettrica.

Infatti sappiamo che in unità del S.I. μ_0 vale $4\pi \cdot 10^{-7}$ quindi $\mu_0 / 2\pi$ vale $2 \cdot 10^{-7}$ nel S.I, come valore numerico e dimensionato.

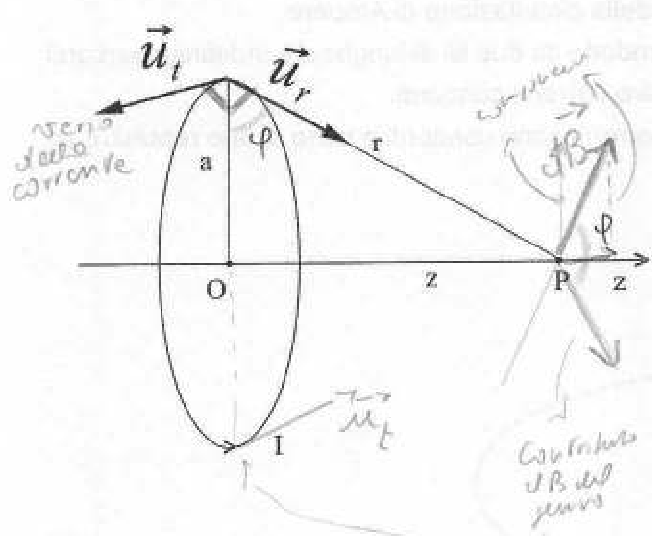
Dunque se abbiamo due conduttori molto lunghi e posti alla distanza di 1 m e facciamo circolare in ognuno di essi una corrente di 1 Ampére allora la forza f per unità di lunghezza che si esercita tra i due conduttori è esattamente $2 \cdot 10^{-7}$ Newton, unità di misura della forza nel S.I.

Questo è un sistema pratico di definire l'Ampére, poiché questo tipo di forze magnetiche tra correnti è più facile da misurare che le forze elettriche tra cariche isolate, ovvero la forza di Coulomb, allora tipicamente l'unità fondamentale del S.I. per quanto concerne questo genere di grandezze elettriche e magnetiche è l'Ampére perchè è più facile da misurare e uindi l'unità di carica è vista come una unità derivata e il Coulomb è legato all'Ampére dalla solita relazione $I = dq / dt$.

APPLICAZIONE DELLA LEGGE DI AMPÈRE-LAPLACE: CAMPO MAGNETICO SULL'ASSE DI UNA SPIRA PERCORSA DA CORRENTE

Ci porremo in una condizione particolare data la difficoltà del calcolo altrimenti.

Connsidereremo una spira circolare percorsa da una corrente uniforme e, ponendoci sull'asse della spira, andremo a vedere quanto vale il campo magnetico sull'asse della spira. Questo calcolo viene fatto utilizzando esplicitamente la legge di Ampére-Laplace.



Abbiamo una spira in cui circola una corrente elettrica costante che fluisce in senso antiorario (vedremo poi cosa succede invertendo il verso della corrente).

Sia a il raggio della spira.

Sia P un punto generico sull'asse della spira, punto nel quale siamo interessati a calcolare il campo magnetico.

Sia O l'origine dell'asse z , concidente con il centro della spira.

La distanza di P dall'origine sia z.

Prendiamo un elemento di corrente sulla spira e sia r la distanza dell'elemento di corrente dal punto P.

La legge di Ampére-Laplace, che è una legge vettoriale, ci dice che il contributo infinitesimo di B al campo magnetico prodotto da un elenento di corrente di un circuito è:

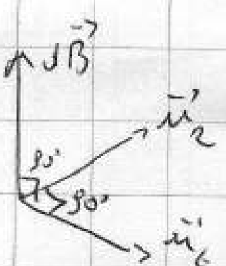
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{u}_t \wedge \vec{u}_r}{r^2} dl$$

dove dl è l'elemento di circuito considerato, $\vec{u}_t$ e $\vec{u}_r$ sono i due versori, come da figura, r è la distanza tra l'elemento di circuito che sta generando il campo ed il punto dove vogliamo che il campo sia calcolato.

L.34.2

Il versore $\vec{u}_t$ è tangente alla circonferenza che rappresenta la spira.
Il versore $\vec{u}_r$ che si diparte dall'elemento di corrente considerato e punta nella direzione del punto P prescelto.

μ_0 = permeabilità magnetica nel vuoto
$\vec{u}_t$: versore tangente alla spira
$\vec{u}_r$ = versore dell'elemento di corrente al punto P.
La figura è in prospettiva, l'angolo tra $\vec{u}_t$ e $\vec{u}_r$ è $90° = \pi/2$. Quindi $\sin \pi/2 = 1$ e quindi il modulo del prodotto vettoriale vale 1.
La direzione del prodotto vettoriale è la direzione di $d\vec{B}$, che è una direzione "sghemba", avendo $d\vec{B}$ sia delle componenti parallele sia delle componenti perpendicolari all'asse z. Questo perché $d\vec{B}$ è perpendicolare al piano formato da $\vec{u}_t$ e $\vec{u}_r$.



$d\vec{B}$ è perpendicolare al piano formato da $\vec{u}_t$ e $\vec{u}_r$.
Il verso di $d\vec{B}$ è quello in figura, ricavato dalla regola della mano destra

Il modulo, infinitesimo quale è il contributo al campo complessivo, del vettore è:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^2} dl$$

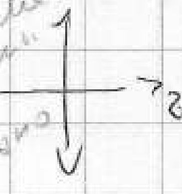
Ora occorre fare il calcolo, attraverso la formula di

Ampère - Laplace integrale del contributo di ciascuno di questi elementi di linea al vettore complessivo $\vec{B}$.

Ne abbiamo disegnato uno e ne abbiamo infiniti da sommare, da integrare

Il calcolo può essere semplificato dalle proprietà di simmetria del sistema: si considera il punto opposto a dl; esso è alla stessa distanza r da P, come lo sono tutti i punti della circonferenza da P.

È logicamente e si ricava facilmente il contributo $d\vec{B}$ in questo punto e i vari ~~componente della~~ dei contributi delle componenti perpendicolari,



si annullano, sono uguali e opposti mentre i contributi delle componenti parallele sono concordi e quindi si sommano.

Questo vale per i due punti considerati e per qualsiasi coppia di punti ~~diametralmente~~ opposti

Quindi è inutile andare a fare un calcolo vettoriale in questo caso, perché il risultato complessivo non potrà che essere un vettore allineato lungo z, poiché tutte le componenti perpendicolari, a due a due si annullano.

Quindi basta calcolare le componenti parallele, che sono individuate dal modulo di $d\vec{B}$ per il coseno dell'angolo φ, che è anche tra u_i e a per similitudine di triangoli rettangoli e quindi $a = r\cos\varphi$

$$dB_{//} = dB\cos\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{r^2}\frac{a}{r}\, dl$$

L'espressione può così essere riscritta:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a}{r^3} dl$$

e questo è il contributo in modulo; con direzione l'asse z e verso positivo.

È il contributo di un elemento generico dl del circuito circolare al campo $\vec{B}$ complessivo, che si ottiene come segue:

$$\underset{\text{integrale di linea}}{B} = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a}{r^3}}_{\text{tutte costanti}} \boxed{\oint dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{a}{r^3} 2\pi a =$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{2 r^3}$$

è l'integrale di linea di un elemento di linea => è la lunghezza del circuito! che è circolare, dunque è la circonferenza della spira!

22'30"

Questa formula è in funzione di r, ma non c'è difficoltà ad esprimerla in funzione di z, essendo z e r collegati tra di loro essendo cateto e ipotenusa di un triangolo rettangolo. Quindi B può essere riscritto così:

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2 (a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e questo è l'andamento di B in funzione di z.

Questo andamento può essere studiato in qualche limite.

L.345

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a = raggio
I = corrente
z = distanza da P

per $z = 0$, al centro della spira $B = \frac{\mu_0 I a^2}{2a^3} = \frac{\mu_0 I}{2a}$

per $z >> a$ $B \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}$, da notare che, moltiplicando sopra e sotto 2π,
(la spira è piccola rispetto al punto P considerato)
↳ il campo scende con la distanza al cubo

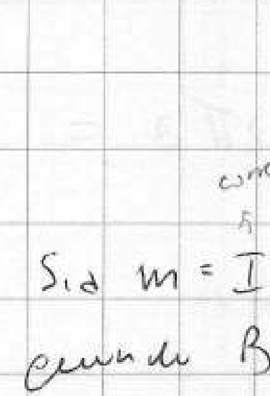
$= \frac{\mu_0 I a^2 2\pi}{4\pi z^3}$ che può essere posta sotto una forma alternativa, ovvero

$$\underbrace{B = \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot\frac{2I\boxed{S}}{z^3}}_{\text{dopo la moltiplicazione per } \frac{2\pi}{2\pi}}$$ → area del cerchio di raggio a, πa^2

concetto da rispettare

Sia $m = IS$ il modulo del dipolo magnetico associato alla spira e quindi B diventa

$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2m}{z^2}$, espressione che diventa interessante per il seguente motivo, andando indietro ad analizzare il campo elettrico prodotto sull'asse del dipolo da un dipolo elettrico



momento di dipolo elettrico

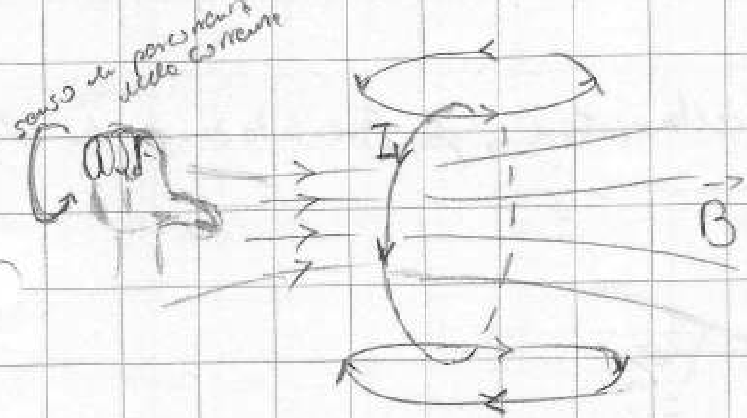
$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p}{z^3}$ e si nota come il campo magnetico B prodotto da una spira e il campo elettrico E prodotto da un dipolo elettrico hanno, rispettivamente sull'asse della spira e del dipolo, la stessa formula, a parte evidentemente una sostituzione, $\frac{\mu_0}{4\pi}$ con $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ e con il nuovo momento di dipolo magnetico m con il momento di dipolo elettrico p.

Queste due formule valgono per z molto grande, rispettivamente

C.34.6

rispetto alla dimensione laterale della spira, al raggio d, e alla dimensione longitudinale del dipolo, quindi alla distanza fra le cariche.

Le linee di flusso del campo B generato dalla spira sono come da disegno sotto



Il campo $\vec{B}$ è sempre tangente alle linee di flusso. L'andamento delle linee di flusso dalla sinistra verso destra dipende dal verso di percorrenza della corrente sulla spira, che in questo caso è antiorario.

Invertendo il verso della corrente si inverte anche il verso delle linee di flusso

vd figura a 33'32"

In figura in alto le linee di flusso del campo elettrico E di un dipolo ± e sotto quelle del campo magnetico B prodotto da una spira percorsa da corrente disposta in un piano perpendicolare al disegno.
L'asse z del dipolo e quello della spira sono stati assunti coincidenti

Si nota come le linee sono esattamente le stesse purché siamo lontani sufficientemente dal dipolo elettrico e dalla spira percorsa da corrente.

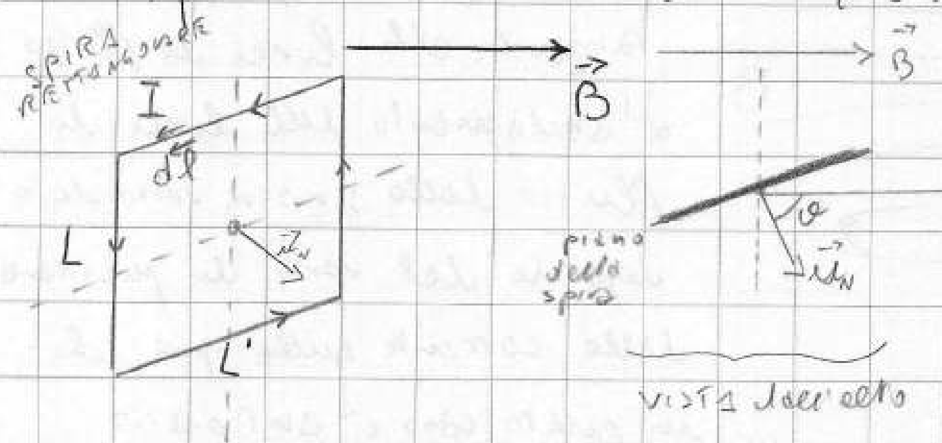
1.34.7

Avvicinandosi al magnete notiamo una notevole differenza, sulla quale torneremo in seguito.

EFFETTI DI UN CAMPO MAGNETICO ESTERNO UNIFORME APPLICATO ALLA SPIRA

trascurando il debole campo magnetico prodotto dalla spira stessa.

La spira che consideriamo è rettangolare, per facilitazione dei calcoli.



Sia $\vec{u}_N$ il versore perpendicolare al piano della spira con origine nel centro della spira.

Sia θ l'angolo formato da $\vec{u}_N$ e $\vec{B}$.

Per studiare l'effetto dinamico di $\vec{B}$ sulla spira dobbiamo applicare espressioni del tipo $\vec{F} = I \int d\vec{l} \wedge \vec{B}$ che ci danno la forza su tratti di conduttore percorsi da corrente, la forza magnetica dovuta ad un campo $\vec{B}$

$$\vec{F} = I \int d\vec{l} \wedge \vec{B}$$ forza magnetica dovuta al campo B.

Nel nostro caso abbiamo quattro lati su uno dei quali è evidenziato $d\vec{l}$, che ha verso concorde con quello della corrente.

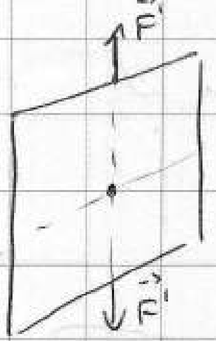
Esaminando le forze presenti sul lato superiore e sul lato inferiore: $d\vec{l}$ e $\vec{B}$ sono sempre perpendicolari tra di loro.

L 34.8

Dunque

$$F' = I B L'$$

La direzione e il verso di queste forze sono rispettivamente la direzione del prodotto vettoriale tra $d\vec{l}'$ e $\vec{B}$ e con verso opposto.

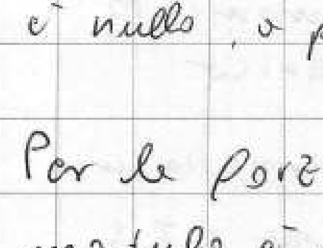


Sono forze uguali in modulo ma opposte di segno e formano una coppia di forze col medesimo asse di applicazione e non hanno effetti dinamici: non muovono il centro di massa del sistema ma al più tendono a deformare il sistema. Ma noi consideriamo rigido il sistema per cui il loro effetto è nullo, o perlomeno trascurabile.

Per le forze che si esercitano sui lati verticali il modulo è diverso, pur essendo sempre $d\vec{l}$ e $\vec{B}$ perpendicolari.

$$F = I B L$$

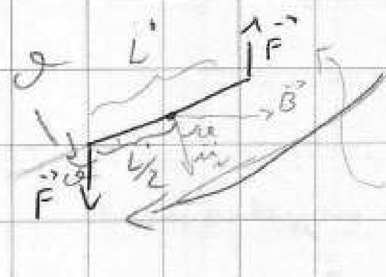
Anche queste forze hanno stessa direzione, stesso modulo e verso opposto, ma le loro rette di applicazione sono diverse.



Dalla vista dall'alto si evidenzia come sono queste forze.

Dunque in questo caso abbiamo una coppia di forze, la forza totale laterale è ancora nulla, tuttavia le due forze non hanno la stessa retta di applicazione.

Il momento delle forze è:



$$\tau_1 = \underbrace{F \frac{L'}{2}}_{\text{Forza per Braccio}} \sin\vartheta$$

$$\tau_2 = F \frac{L'}{2} \sin\vartheta$$

moduli dei momenti delle forze

I PRODOTTI VETTORIALI HANNO LO STESSO SEGNO, SONO CONCORDI 42'06"

I moduli di τ_1 e τ_2 si sommano, dunque il momento vettoriale complessivo è dato da

$$\tau = I B \underbrace{L L'}_{S} \sin\vartheta = \boxed{m B \sin\vartheta}$$

modulo del momento meccanico

τ è il modulo del momento meccanico espresso in termini del campo magnetico e di m, pari a IS.

Abbiamo l'equilibrio quando τ è 0, cioè quando $\vartheta = 0$, cioè quando la normale alla spira va nella stessa direzione di B e quindi il piano della spira è ortogonale a B.

Abbiamo quindi una tendenza della spira a ruotare fino a portarsi in equilibrio.

Questa è una relazione scalare, ma esiste una analoga relazione vettoriale, che è la seguente:

$\vec{\tau} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ dove il vettore m è un vettore che ha per modulo IS e per direzione e verso, la direzione e il verso del versore $\vec{i}_n$ perpendicolare al piano della spira e ha verso tale che sia concorde col pollice di una mano destra nel momento in cui le altre dita si chiudono sul palmo descrivendo una traiettoria concorde con il segno di percorrenza della corrente sulla spira.

$\vec{\tau}$ → momento meccanico sulla spira

$\vec{m} = I S \vec{i}_n$

Questa relazione vettoriale descrive l'effetto dinamico di un campo magnetico esterno sopra una spira percorsa da corrente parametrizzata dal vettore momento di dipolo magnetico.

Una analoga relazione era la seguente

$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$

$\vec{\tau}$ → momento meccanico

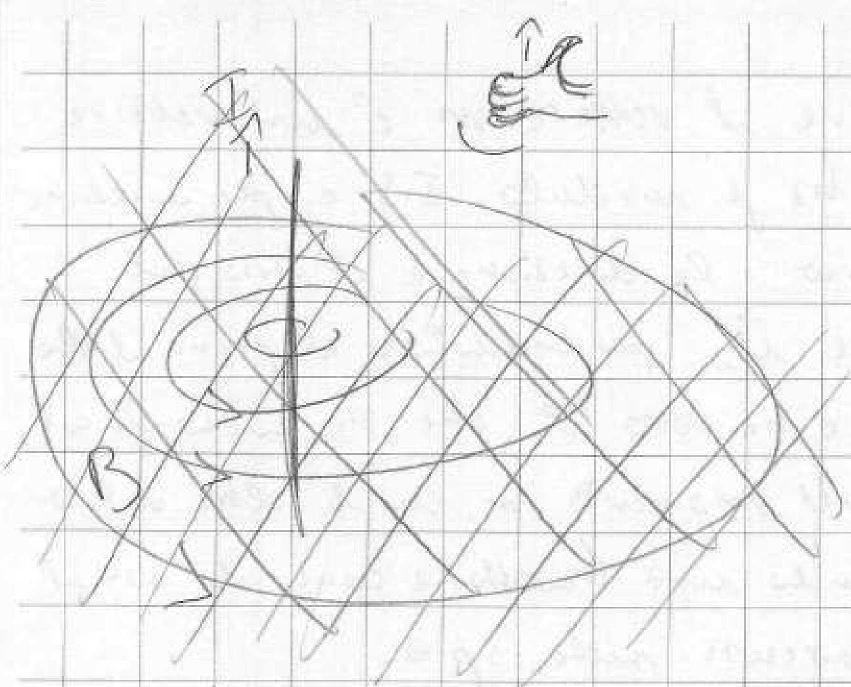
$\vec{p}$ → momento di dipolo elettrico

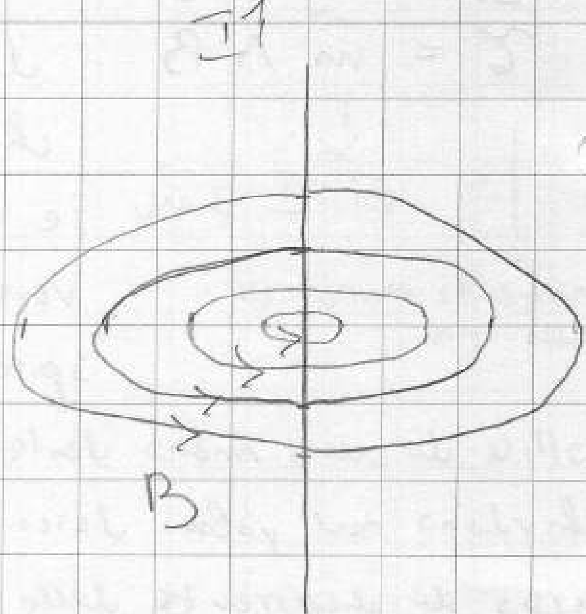
$\vec{E}$ → campo elettrico uniforme applicato.

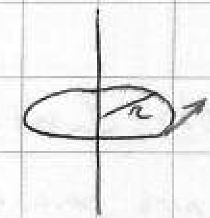
Risulta evidente l'analogia tra dipolo elettrico e dipolo magnetico.

CALCOLO DELLA CIRCUITAZIONE o CIRCOLAZIONE DEL CAMPO B PRODOTTO DA UNA CORRENTE RETTILINEA INDEFINITA

che ci porterà alla dimostrazione del teorema di Ampère







prodotto scalare

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\underbrace{\vec{u}_t\cdot d\vec{l}}_{\text{vettori concordi perché entrambi tangenti e hanno il senso di percorrenza mostrato}}$$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\underbrace{\oint dl}_{\text{sulla circonferenza = la circonf. = }2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{\cancel{2\pi r}}\cancel{2\pi r} = \mu_0 I$$

CIRCUITAZIONE DI B

La circolazione del campo elettrico statico E lungo una qualsiasi linea chiusa era 0, perché E è conservativo.

Il campo B non è conservativo poiché la sua circolazione attraverso una linea chiusa non è 0. Questa è una proprietà generale

LEZIONE 35 LEGGE DI AMPÈRE; LEGGE DI GAUSS PER B

Prof. Paolo Alba
50'18"

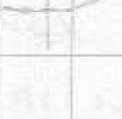
Legge della circuitazione di Ampère
Solenoide
Teorema di Gauss per il campo magnetico B
Equazioni di Maxwell (campi statici) (4 equaz. per campo elettrico e magnetico)

Lez. conclusiva delle proprietà statiche del campo magnetico $\vec{B}$

Nella lezione precedente abbiamo esaminato alla circuitazione del campo magnetico B. Quindi al suo integrale di linea sopra un percorso chiuso.

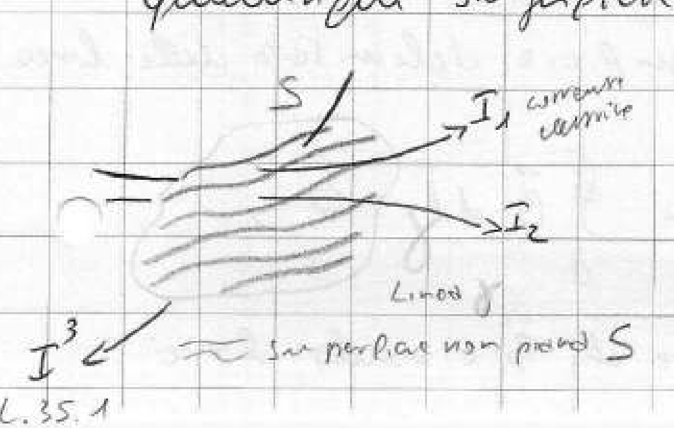
Per una corrente elettrica rettilinea il valore di B in ogni punto dello spazio è dato dalla legge di Biot-Savart e il calcolo di una circuitazione del campo B su una linea chiusa che comprenda al suo interno la corrente generatrice del campo B stesso è facile se la linea è una circonferenza con centro un punto sull'asse su cui fluisce la corrente elettrica generatrice del campo.

(1) $$\oint_{\substack{\text{circonf.} \\ \text{o qualunque linea chiusa}}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$



CIRCUITAZIONE O CIRCOLAZIONE DI $\vec{B}$ SU UNA CIRCONFERENZA.
I è la corrente stazionaria sull'asse.

Questa espressione vale per ogni linea chiusa, la corrente I è la corrente che passa attraverso una qualunque superficie sottesa dalla linea chiusa considerata.



La superficie S entro una linea chiusa γ è tagliata da correnti elettriche I_1, I_2, I_3.
La circuitazione (o circolazione) di $\vec{B}$ (sopra) sulla linea chiusa γ è data dalla (1).

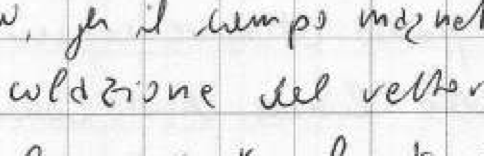
Avremo quindi

$$\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow \mu_0 (I_1 + I_2 + \dots)$$

Le correnti si sottrarranno o si sommeranno in funzione del loro verso di percorrenza.

Se nella superficie non fluisce nessuna corrente ma esiste un campo magnetico allora la circolazione di $\vec{B}$ sarà 0; questo vale anche nel caso in cui la somma delle correnti sia 0.

Fra il teorema della circuitazione del campo magnetico e il teorema di Gauss per il campo elettrico esistono delle esistono analogie molto strette.
Il teorema di Gauss per il campo elettrico mettera in relazione, nella sua forma integrale il flusso del campo elettrico attraverso una superficie con la carica elettrica contenuta all'interno della superficie stessa, contenuta nel volume delimitato dalla superficie.
Qui, per il campo magnetico, abbiamo una relazione tra la circolazione del vettore B lungo una linea 
e la corrente che taglia una superficie delimitata dalla linea.



Nel caso in figura $\oint_\gamma \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$,

ma non vuol dire che $\vec{B}$ è nullo, lo è

135.2

la circolazione. Il campo $\vec{B}$ è diverso in ogni punto ma ha una forma tale che in una sommatoria di questo genere la sua circuitazione sulla linea chiusa γ è 0.
Considerando una superficie chiusa su una linea chiusa γ' che è tagliata da una sola corrente, allora la circuitazione

sarà diverso da 0.

$$\oint_{\gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0 = -\mu_0 I$$

girato il verso di I

s' γ'

(o LEGGE)

IL TEOREMA DELLA CIRCUITAZIONE DI AMPÈRE

10'00"

può essere posto secondo una forma lievemente diversa invocando la relazione che intercorre tra corrente e vettore densità di corrente.

flusso densità di corrente sulla superficie S

densità di corrente

I

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int \vec{j} \cdot \vec{u}_N \, dS$$

corrente che fluisce

I è definita in termini di una densità di corrente il cui flusso attraverso la superficie considerata dà I

I è la corrente che fluisce attraverso una superficie qualunque che abbia come contorno la linea chiusa sulla quale si effettua l'integrazione

I definita in termini di una densità di corrente il cui flusso attraverso la superficie considerata dà I; quindi μ_0 è moltiplicato per il flusso del vettore $\vec{j}$ attraverso una qualsiasi superficie delimitata dalla linea chiusa lungo la quale si calcola la circuitazione del campo B stesso.

Come per il campo elettrico, anche il teorema di Ampère può essere "tradotto" in forma differenziale (= funzione del punto)

CIRCUITAZIONE DI UN CAMPO ELETTRICO STATICO SU UN PERCORSO ARBITRARIO (integrale di linea)

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

SEMPRE SE $\vec{E}$ È STATICO, OVVERO SIAMO IN NON DIPENDENZA DAL TEMPO.

Questo ci garantisce che il campo E statico è conservativo. (derivandolo da un potenziale)
Esso ammette un potenziale.

La forma differenziale di questa forma integrale è:

$$rot\ \vec{E} = 0$$

→ in ogni punto del campo E il rotore è n
il rotore è un vettore ottenuto mediante una o più operazioni di differenziazione delle componenti E_x E_y E_z del vettore E in un sistema di rif.to cartesiano.

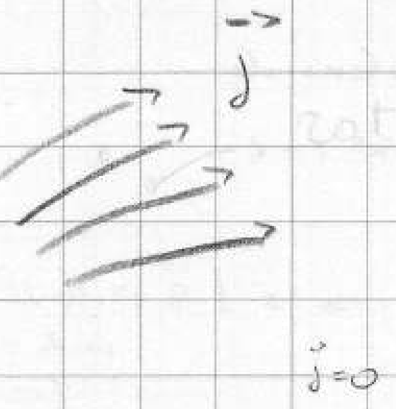
Vediamo qual è in forma differenziale l'analoga equazione che traduce l'informazione che è contenuta nel teorema, o legge, di Ampère.
Anche in questo caso compare la grandezza rotore del vettore B, che non è identicamente nullo in tutti i punti dello spazio.

LEGGE DI AMPÈRE IN FORMA DIFFERENZIALE

$$rot\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

, il rotore di B è proporzionale, tramite μ_0, al vettore densità di corrente.
Il rotore di B è dato dal prodotto vettoriale dell'operatore gradiente per B.

L.35.4



Il rotore di $\vec{B}$ non è mai 0 dappertutto. Lo è dove $\vec{j} = 0$.

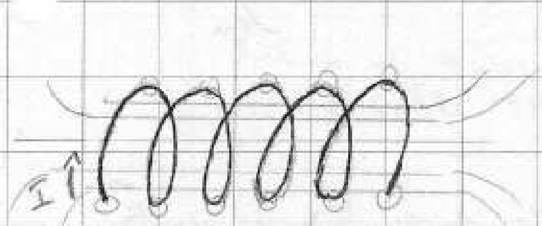
Dunque le due forme differenziali sono:

$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (IL CAMPO $\vec{B}$ NON È CONSERVATIVO E NON AMMETTE UN POTENZIALE SCALARE)

$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ (IL CAMPO E È CONSERVATIVO E AMMETTE UN POTENZIALE SCALARE)

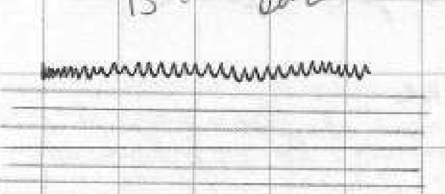
SOLENOIDE RETTILINEO INDEFINITO.

CALCOLO DEL CAMPO MAGNETICO CON LA LEGGE DELLA CIRCUITAZIONE DI AMPÈRE



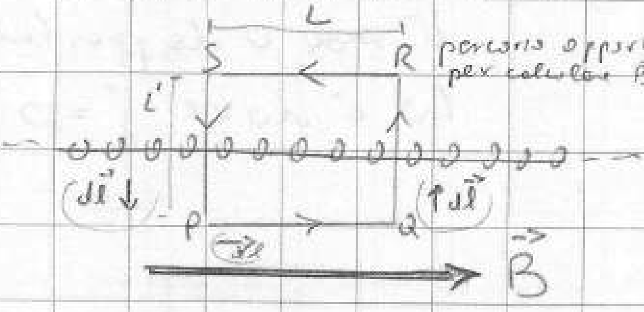
Il campo B nel centro del solenoide è uniforme; all'esterno tende a compensarsi, ad annullarsi; all'interno tendono a rafforzarsi.

Il SOLENOIDE È UNO STRUMENTO PER COSTRUIRE UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME IN UNA REGIONE DELLO SPAZIO (all'interno), COME IL CONDENSATORE LO È PER COSTRUIRE UN CAMPO ELETTRICO UNIFORME. (Lo è all'interno).



SOLENOIDE, SPIRE NON NOTATE.

L'intensità di $\vec{B}$ all'interno del solenoide



percorso opportuno per calcolare $\vec{B}$, un rettangolo di lato L e l'

$d\vec{l}$ in entrambi i casi è $\perp \vec{B} \Rightarrow \vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$, perché $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\frac{\pi}{2} = 90°$

— Lunghezza indefinita del solenoide; il solenoide deve essere compatto!!!
L deve essere piccolo rispetto a tutto il solenoide

$\hat{I}$

$$\oint_{rettangolo} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

scalare, il modulo è $B\,dl\cos\alpha$ $\quad$ $|a\cdot b| = |b\cdot a| = a\cdot b\cdot\cos\alpha$

L'INTEGRALE DI LINEA SUL RETTANGOLO È LA SOMMA DEI VARI INTEGRALI SUI SEGMENTI PQ, QR, RS, SP.

Contributo di RS : $\vec{B} = 0$

QR : $\vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$ perché $d\vec{l} \perp \vec{B}$ $\quad$ 28'40"

SP : $\vec{B}\cdot d\vec{l} = 0$ giacché $d\vec{l} \perp \vec{B}$

PQ : $d\vec{l} \parallel \vec{B}$

$$\oint_{rettangolo} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{PQ} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int \underbrace{B\,dl}_{\text{prodotto dei moduli giacché } d\vec{l} \parallel \vec{B}} = \overset{\text{è costante}}{B}\int_{PQ} dl =$$

$= B\cdot \underbrace{L}_{\text{lato del rettangolo}}$ e questo che è la circuitazione di $\vec{B}$ lungo il percorso opportuno considerato, e per la legge di Ampère deve essere uguale a $\mu_0 I_{totale}$

↳ corrente che fluisce lungo il percorso, attraverso la superficie delimitata dal percorso

$$B\cdot L = \mu_0 I_{totale}$$

La corrente I sta fluendo perpendicolarmente alla superficie del rettangolo e nella stessa direzione, cioè esce dal piano del disegno.

$I_{totale} = N I$ con N numero di spire comprese nel tratto di lunghezza L del solenoide

Quindi:

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I = \mu_0 n I$$

all'interno B è uniforme e aumenta secondo n e I.

con $n = \frac{N}{L}$ pari al numero di spire per unità di lunghezza.

33'21''

B è uniforme all'interno e zero all'esterno; in realtà B all'esterno è di ordine inferiore.

TEOREMA DI GAUSS PER $\vec{E}$

CELLA

CAMPO ELETTRICO

(1ª EQUAZIONE DI MAXWELL)

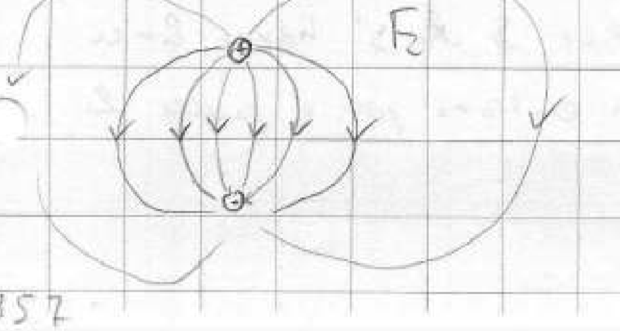
$$\oint \vec{E} \cdot \vec{u}_N \, dS = \frac{q_{interna}}{\varepsilon_0}$$

FORMA INTEGRALE = flusso di $\vec{E}$

$$\underset{\text{divergenza}}{\operatorname{div}} \vec{E} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ρ = densità di carica

FORMA DIFFERENZIALE



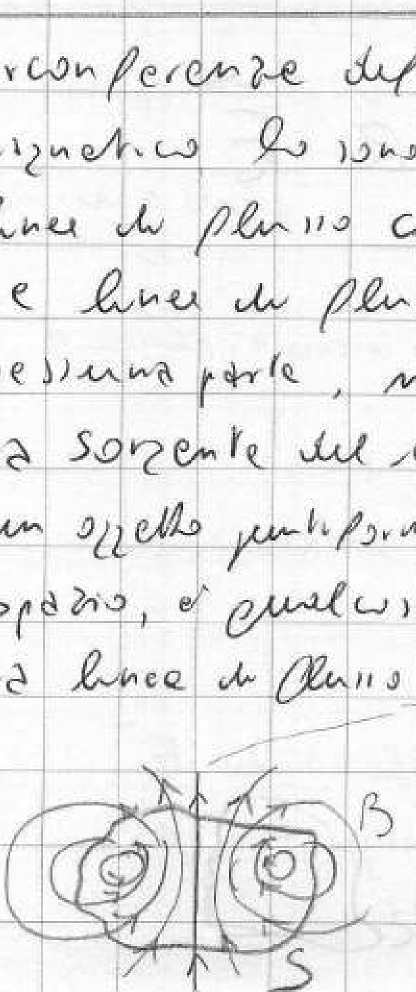
Le linee di flusso di $\vec{E}$ "nascono" alla carica + e finiscono alla carica −

0.357

Il campo E e il campo B sono simili lontano ~~dall~~ dal dipolo.
Al contrario delle linee di flusso di un campo elettrico statico $\vec{E}$ che iniziano dalla carica positiva e finiscono nella carica negativa, le linee di flusso di un campo magnetico B prodotto da un dipolo magnetico, ovvero una spira percorsa da corrente, non hanno sorgenti; non ci sono terminazioni delle linee di flusso di B.

CAMPO MAGNETICO B

Il campo B vicino al dipolo magnetico è molto diverso dal campo E vicino al dipolo elettrico.
I campi B e E sono molto simili lontano dai dipoli.
Attorno al dipolo magnetico le linee di flusso sono sostanzialmente delle circonferenze deformate, che allontanandosi dal dipolo magnetico lo sono ancora di più; rimangono comunque linee di flusso chiuse e questo è una regola generale.
Le linee di flusso del campo magnetico B non nascono da nessuna parte, non terminano da nessuna parte.
La sorgente del campo B è la corrente stessa, non è un oggetto puntiforme limitato in un certo volume dello spazio, è qualcosa di distribuito.
La linea di flusso centrale si chiude all'infinito



Sia la superficie S che s' hanno linee di flusso che entrano prima e quelle che escono.

L.35.8

Una superficie in un campo magnetico B ha flussi entranti e uscenti. Non c'è un flusso netto attraverso la superficie.
Flusso netto che si verifica in presenza di un campo elettrico se la superficie chiusa considerata racchiude una delle cariche che sono sorgenti del campo elettrico.

LEGGE DI GAUSS PER $\vec{B}$

(2ª EQUAZIONE DI MAXWELL)

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{u}_N \, dS = 0$$

← FLUSSO DI B ATTRAVERSO UNA QUALSIASI SUPERFICIE CHIUSA È 0 SEMPRE

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

La divergenza di B in forma differenziale, è nulla sempre, B non ha sorgenti o punti di terminazione all'∞

EQUAZIONI DI MAXWELL

(in forma differenziale, per campi statici)

(1) $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (3) $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

(2) $\underbrace{\operatorname{rot} \vec{E} = 0}_{\text{CONSERVATIVO, AMMETTE UN POTENZIALE SCALARE}}$ (4) $\underbrace{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}}_{\text{CAMPO SOLENOIDALE}}$

(1) FISICAMENTE SIGNIFICA CHE IL CAMPO $\vec{E}$ AMMETTE SORGENTI PUNTIFORMI; LE SORGENTI DEL CAMPO E SONO LE CARICHE

(2) IL CAMPO $\vec{E}$ È CONSERVATIVO

(3) PER IL CAMPO $\vec{B}$ NON ESISTONO CARICHE MAGNETICHE, NON ESISTE UNA DENSITÀ DI CARICA MAGNETICA

(4) LE SORGENTI DEL CAMPO B SONO LE CORRENTI; $\vec{B}$ NON È CONSERVATIVO.

L358

Un campo che soddisfa la (3) e la (4) è detto solenoidale, le cui linee di flusso non scaturiscono né terminano in nessun punto finito dello spazio.
I poli del campo $\vec{B}$ non esistono.
Il dipolo magnetico, per come è stato definito, altro non è che una spira percorsa da corrente.
L'origine microscopica e macroscopica di $\vec{B}$ sono le correnti, quindi le cariche in moto.
L'origine del campo $\vec{E}$ sono le cariche

Le quattro equazioni* descrivono la natura e come si comportano i campi.
Fin quando i campi sono statici il campo $\vec{E}$ e $\vec{B}$ non hanno nulla a che fare tra loro.

Le equazioni per $\vec{B}$ e per $\vec{E}$ sono del tutto indipendenti

Sono equazioni per i campi statici.

Per campi dinamici le equazioni subiscono trasformazioni tali da poter essere correlate tra di loro, questo dalla prossima lezione.

* eq. diff. le alle derivate parziali, molto complesse, ma la cui soluzione dà i campi in tutti i punti

1 35 10

LEZIONE 36

Induzione elettromagnetica

Prof. Paolo Allia
52'02''

Campi elettrici e magnetici dipendenti dal tempo
Legge di Faraday-Henry-Lenz
Autoinduzione
Energia del campo magnetico

Studio dei fenomeni elettromagnetici dipendenti dal tempo.
L'induzione elettromagnetica pone in relazione campi elettrici e campi magnetici dipendenti dal tempo.
Ha importanza in elettrotecnica ed elettronica poiché molte applicazioni relative sono basate su questo fenomeno.

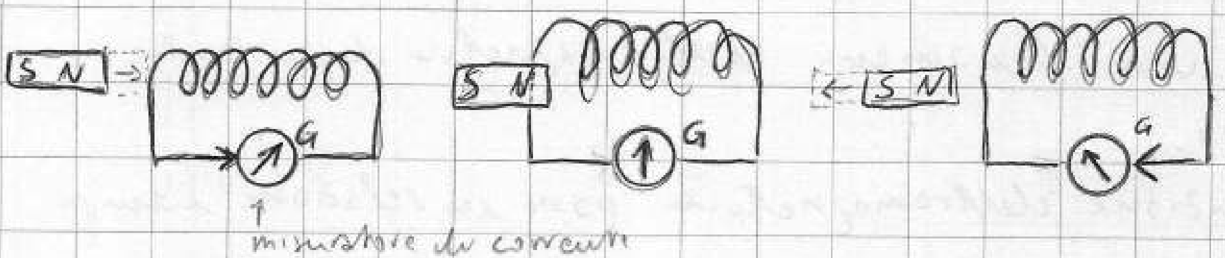
INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Le quattro equazioni di Maxwell delle lezioni precedenti non prevedono nessuna relazione tra campo elettrostatico $\vec{E}$ e campo magnetostatico $\vec{B}$.
Ma un legame deve pur esistere dal momento che campi elettrici sono generati da cariche e campi magnetici sono generati da cariche in moto.
Le leggi derivate dallo studio dei fenomeni ha prodotto risultati empirici che hanno avuto una formalizzazione matematica accurata.
Prendiamo dunque in esame un circuito inerte, non collegato a nessun generatore, ovvero non collegato a nessun elemento che produca una differenza di potenziale, quindi un campo elettrico nel circuito stesso.

CIRCUITO INERTE IN PRESENZA DI UN CAMPO MAGNETICO

Il campo magnetico sia generato da un magnete permanente a sbarretta.

Il campo magnetico è statico equivalente a quello di un grosso dipolo magnetico.



Nello spostamento del magnete notiamo che una corrente fluisce nel circuito, anche in assenza di generatori come pile.

Questo significa che è stata indotta una forza elettromotrice nel circuito.

Il misuratore indica che la corrente fluisce in senso opposto a seconda del movimento.

Sappiamo che una differenza di potenziale tra due punti del circuito produce il flusso di una corrente.

In particolare il legame tra la d.d.p. tra due punti A e B è:

$$\underbrace{V_A - V_B}_{d.d.p.} = \underbrace{\int_A^B}_{\text{integrale di linea}} \vec{E} \cdot \underbrace{d\vec{l}}_{\text{prodotto scalare}}$$

Quando il discorso è riferito all'intero circuito allora l'integrale non è più un integrale aperto ma è chiuso sul circuito.

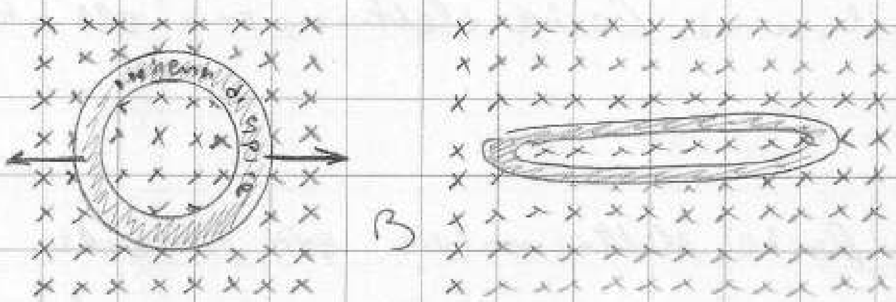
$-V_\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$ e questa particolare forma di circuitazione, di circolazione di $\vec{E}$ è chiamata **forza elettromotrice indotta**.
In condizioni statiche in realtà, quindi per campi conservativi, $V_\varepsilon = 0$ perché per campo conservativo la circolazione del campo elettrico statico è nulla.
È proprio la definizione di conservatività del campo elettrico in questione.

$$V_\varepsilon = 0 \quad \text{(CONSERVATIVO)}$$

Fisicamente questo risultato implica che un circuito chiuso immerso in un campo elettrico statico non ospita nessuna corrente, né stazionaria né non stazionaria.
Un campo elettrico statico non è in grado di produrre, di generare corrente in un circuito chiuso.
Per generare corrente c'è bisogno di un generatore, di una pila, che genera una differenza di potenziale all'interno del circuito e quindi una forza elettromotrice all'interno del circuito.

Nel caso visto, una forza elettromotrice era presente anche in assenza di un generatore interno al circuito stesso.
La forza elettromotrice è sperimentalmente proporzionale alla rapidità con cui viene modificato il campo magnetico nell'intorno del circuito.
La quantità di interesse non è tanto il campo magnetico

nei punti dello spazio prossimi al circuito elettrico in considerazione, ma il flusso del campo magnetico "concatenato" col circuito, ovverosia il flusso del campo magnetico attraverso una superficie che è sottesa dal circuito stesso.
Quello che quindi genera una forza elettromotrice nel circuito è una variazione del flusso magnetico concatenato col circuito stesso.
Il flusso magnetico concatenato al circuito può essere modificato modificando ad es. l'intensità del campo magnetico che è generato in prossimità del circuito, modificandolo nel tempo.
Se il campo magnetico è variabile si ha una variazione di flusso nel circuito.
Tuttavia una variazione di flusso può non implicare una variazione di campo, perché il flusso è un integrale di superficie del campo magnetico sopra una superficie aperta e modificando la superficie mantenendo costante il campo magnetico il flusso può cambiare.



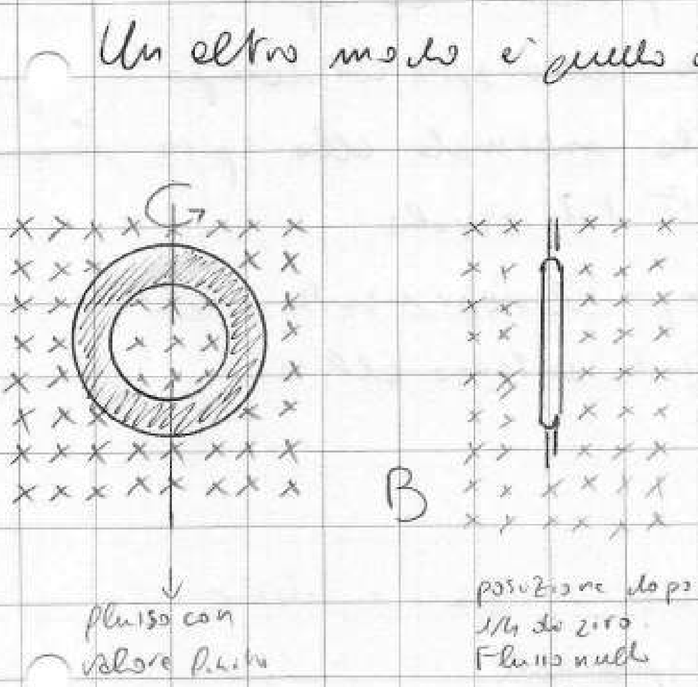
A sinistra un insieme di spire entro cui non passa alcuna corrente e non è presente nessuna forza elettromotrice di tipo indotto. Siamo in condizioni statiche e il campo B è statico. Deformando la spira il flusso varia, a dx, durante la deformazione si assiste al flusso di una corrente nel circuito. Si verifica l'esistenza di una forza elettromotrice indotta nel circuito.

Si noti che alla fine della deformazione non c'è nessuna forza elettromotrice indotta.

La forza elettromotrice indotta si osserva solo durante la trasformazione, quando il flusso cambia ed è proporzionale alla rapidità con cui il flusso cambia.

La deformazione del circuito è, in questo caso, il modo in cui variare il flusso.

Un altro modo è quello di far ruotare un determinato circuito fatto di spire, nelle linee di forza (o di flusso) di un campo magnetico statico.



Dalla situazione a ~~destra~~ sinistra a quella a destra, il flusso è variato: a sinistra ha un certo valore finito, a destra è nullo.

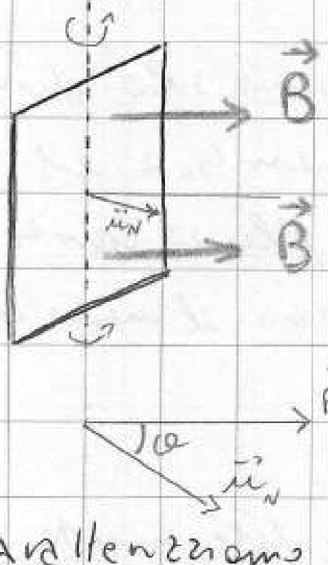
Nel cambiamento di stato si assiste allo scorrimento di una corrente indotta e si verifica l'esistenza di una forza elettromotrice indotta nelle spire.

Questo è il fenomeno attraverso il quale si costruiscono alternatori, motori elettrici ecc.

Se si vuole produrre una corrente alternata in un circuito si prende una spira, a cui sarà applicata una resistenza di carico, si impernia intorno ad un asse e si fa ruotare la spira in un campo magnetico statico. Nella spira si produce una forza elettromotrice indotta di tipo alternato 14'33"

1 36.5

Calcoliamone il valore.



Supponiamo di avere una spira, di forma qualunque, imperniata su un asse verticale e supponiamo che la spira sia inserita in un campo magnetico statico B uniforme che riempie tutta la regione di spazio dove è presente la spira.

Caratterizziamo l'angolo formato dalla spira col campo magnetico attraverso l'angolo della normale alla spira $\vec{u}_N$ con la direzione di $\vec{B}$ e sia ϑ tale angolo.

Supponiamo che ϑ vari col tempo linearmente, cioè che la spira giri con velocità costante intorno all'asse

$$\vartheta = \omega t$$

pulsazione ; 2π volte = frequenza di rotazione

Il flusso magnetico Φ_B della spira vale

$$\Phi_B(t) = \underbrace{\int_S \vec{B} \cdot \vec{u}_N \, dS}_{\text{per def.}} = B S \underbrace{\cos \omega t}_{\cos\vartheta}$$

Il flusso magnetico Φ_B dipende dal tempo. Questa è la condizione per cui si verifica una forza elettromotrice indotta nella spira.

Per calcolare la f.e.m. occorre conoscere la legge empirica che collega la f.e.m. indotta alla variazione di flusso, che è la LEGGE DI FARADAY-HENRY-LENZ 16'55"

LA L. DI LENZ È CONTENUTA NELLE ESPRESSIONI

LEGGE DI FARADAY-HENRY-LENZ

$$\underline{V_\varepsilon} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot\vec{u}_N\, dS$$

contributo di Lenz

forma applicata al flusso

V_ε è la forza elettromotrice indotta in un circuito chiuso

Φ_B è il flusso di un campo magnetico concatenato col circuito, flusso che attraversa le spire del circuito

$\frac{d\Phi_B}{dt}$ ne è la derivata rispetto al tempo

Quindi, tornando all'analisi della spira di poco fa, il flusso è dipendente dal tempo $\Phi_B = BS\cos\omega t$. Dunque la f.e.m. indotta V è data da:

$$\underset{f.e.m.}{V} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = BS\,\omega\sin\omega t$$

Se la spira ruota con moto uniforme attorno all'asse viene generata in essa una f.e.m. che è alternata e ha la stessa frequenza di rotazione della spira stessa. Questo è un modo per produrre una f.e.m. alternata e quindi una corrente elettrica alternata.

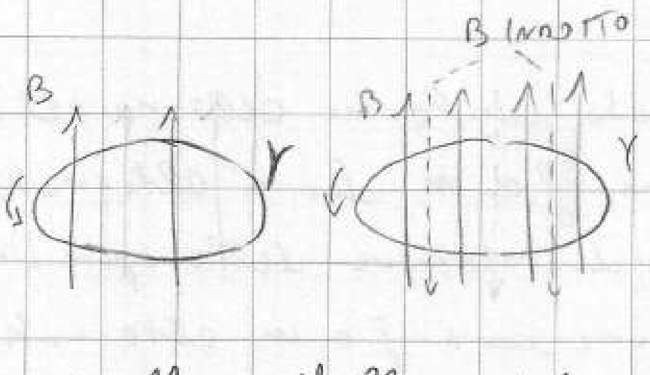
Questo è il più semplice e banale esempio di alternatore che possiamo concepire

Questa legge trova applicazione negli alternatori, nei generatori, nei motori elettrici ecc.

1367

IL CONTRIBUTO DI LENZ - LA LEGGE DI LENZ

La corrente indotta fluisce secondo una direzione ben precisa. Non casuale. Questa corrente indotta genera un campo magnetico secondario.
Quindi ci sono due campi magnetici e due flussi del campo magnetico concatenato con il circuito considerato.
La corrente indotta fluisce sempre in modo tale da generare un campo magnetico secondario tale che il suo flusso si opponga o tenda ad opporsi alle variazioni del flusso principale.
La corrente fluisce in modo tale da "frenare" in qualche modo la variazione del flusso magnetico principale. Questo è il significato fisico del segno meno e il contributo fondamentale della legge di Lenz.



Nel tempo il campo B è crescente, e dx lo stato finale, come convenzione di rappresentazione grafica.
Se il campo B aumenta nel tempo allora il flusso del campo B attraverso il circuito la cui forma non varia nel tempo, starà crescendo.
La corrente circolerà nel circuito per effetto della forza elettromotrice indotta in modo tale da generare un campo secondario, le linee tratteggiate del campo indotto, ovvero il campo magnetico secondario che tende a opporsi all'incremento del campo magnetico principale.
Le correnti indotte "ostacolano" la variazione del campo magnetico principale. Queste sono considerazioni sostanzialmente di tipo sperimentale

L.36.8

Considerare che le correnti indotte possono avere verso concorde al campo porta ad un assurdo che va contro il principio di conservazione dell'energia in quanto si avrebbe un rafforzamento continuo del campo magnetico all'infinito.

Una forma alternativa della legge di Faraday-Henry introduce il concetto di relazione tra campo elettrico e campo magnetico nell'equazione caratteristica del fenomeno della induzione elettromagnetica

FORZA ELETTROMOTRICE INDOTTA

$$V_\mathcal{E} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot \vec{u}_N \, dS$$

Questa è una forma in cui in sostanza compaiono in modo esplicito sia il campo B sia il campo E tuttavia è una forma di tipo integrale.
A questa forma integrale assoceremo nella prossima lezione una forma differenziale. 28'40"

Per ottenere una forza elettromotrice in un circuito chiuso si può fare in alternativa a un campo magnetico esterno, cioè tarte la corrente che circola nel circuito stesso.
Se la corrente che circola nel circuito è dipendente dal tempo il campo magnetico generato da essa sarà dipendente dal

1 36.5

tempo e il flusso del campo magnetico concatenato con il circuito dipenderà dal tempo con una certa legge e quindi interverrà all'interno del circuito una forza elettromotrice indotta da queste variazioni di flusso concatenato.
Questo è il fenomeno molto importante per le applicazioni della autoinduzione.
Forza elettromotrice e corrente indotte in cui sta fluendo una corrente dipendente dal tempo.
Abbiamo detto che una corrente che fluisce in un circuito genera un flusso concatenato con esso.
Sperimentalmente si trova che esiste una relazione ben precisa tra intensità istantanea della corrente che fluisce in un certo circuito e flusso del campo magnetico generato dalla corrente stessa e concatenato con il circuito in questione.

COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE

$$L = \frac{\Phi_B}{I}$$

SI RISCONTRA CHE PER UN DETERMINATO CIRCUITO CON UNA DETERMINATA FORMA IL RAPPORTO TRA FLUSSO TOTALE DEL CAMPO MAGNETICO PRODOTTO DALLE CORRENTI CHE FLUISCONO NEL CIRCUITO E CORRENTE CHE FLUISCE NEL MEDESIMO, È COSTANTE E TALE COSTANTE VIENE INDICATA CON LA LETTERA L E CHIAMATA COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE O AUTOINDUTTANZA DEL CIRCUITO.

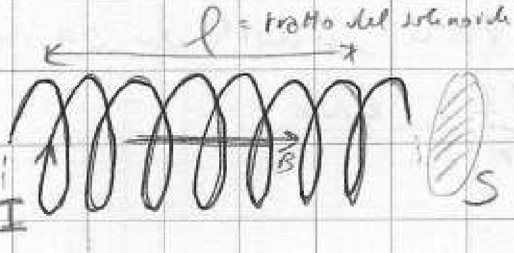
Calcolo: solenoide rettilineo indefinito

Questa relazione vale sia nel caso di correnti stazionarie che nel caso di correnti dipendenti dal tempo.
Il coefficiente di autoinduzione, nel S.I. è misurato in Tesla · m² / Ampère e il nome di questa unità di misura nel S.I. è Henry, quindi 1 Henry è 1 Tesla per m² diviso 1 Ampère.

3'48"

L.36.10

CALCOLO DI L DI UN SOLENOIDE RETTILINEO INDEFINITO



$$B = \mu_0 n I$$

n. spire per unità di lunghezza

$n = \frac{N}{\ell}$ → n. di spire in ℓ

. SPIRE STRETTAMENTE IMPACCHETTATE
. LUNGHEZZA INDEFINITA

$$\Phi_B^{(1)} = B S = \mu_0 n I S$$

↳ flusso di B attraverso una singola spira

$$\Phi_B = N \Phi_B^{(1)} = \mu_0 n I \underset{n \cdot \ell}{N} S =$$

$$= \mu_0 n^2 I \ell S$$

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \mu_0 n^2 \ell S$$

fattore di impacchettamento = n. di spire per unità di lunghezza

$$\frac{L}{\ell} = \mu_0 n^2 S$$

(Henry/m, L su unità di lunghezza)

L dipende dalla geometria del circuito

E' opportuno notare che se esprimiamo il flusso del campo magnetico concatenato con un determinato circuito, flusso prodotto dalle correnti che fluiscono nel circuito come LI, allora la legge di Faraday-Henry si modifica ~~conseguente~~ ~~~~

$$\Phi_B = L I$$

$$V_\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI)$$

(36.11 f.e.m. indotta nel circuito

Se il circuito, nelle condizioni di osservazione, non si deforma allora L che dipende dalla geometria del circuito resta costante nel tempo allora la forza elettromotrice indotta di origine autoinduttiva V_E è data da $-L\frac{dI}{dt}$, cioè

$$\phi_B = LI$$

$$V_E = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI)$$, se L costante, allora

$$V_L = -L\frac{dI}{dt}$$ e questa è la f.e.m. di autoinduzione

FORZA ELETTROMOTRICE DI AUTOINDUZIONE

$$V_L = -L\frac{dI}{dt}$$

In un circuito dove la corrente elettrica sta variando nel tempo con una certa legge si manifesta una f.e.m. di autoinduzione che è proporzionale tramite il coefficiente di autoinduzione a $-\frac{dI}{dt}$. Quindi è opposta in segno alla variazione della corrente all'interno del circuito.

Il segno meno rappresenta la legge di Lenz, discussa prima.

Le conseguenze di questo tipo di ragionamento saranno evidenti nella trattazione del caso di un un circuito in cui non è possibile trascurare il coefficiente di autoinduzione e non è possibile trascurarne le resistenze, quello che va sotto il nome di circuito RL.

L'effetto del segno meno si traduce in un effetto ritardante della autoinduzione rispetto alle variazioni della corrente principale. La corrente principale varia in un certo modo, si instaura nel circuito una f.e.m. indotta che fa fluire la corrente secondaria che si oppone alla variazione della corrente principale nel senso espresso dalla legge di Lenz.

CIRCUITO CON CORRENTE DIPENDENTE DAL TEMPO

e in cui vi è un contributo di f.e.m. autoindotta.
La f.e.m. totale all'interno del circuito sarà la somma di una eventuale f.e.m ottenuta da un generatore con quella autoindotta. È questa forza elettromotrice totale V che entra nella legge di Ohm.

$$V_{tot} = V + V_L = RI$$ in un circuito resistivo
in questa espressione compaiono tutti potenziali

$$V - L\frac{dI}{dt} = RI$$

$$V = L\frac{dI}{dt} + RI$$ moltiplichiamo per I

$$\underbrace{VI}_{\text{è una potenza, la f.e.m. del generatore}} = \underbrace{LI\frac{dI}{dt}}_{\text{Termine di origine autoinduttiva}} + \underbrace{RI^2}_{\text{potenza di Joule}}$$ in questa espressione compaiono potenze

VI può essere interpretata come potenza consumata dal generatore, potenza spesa dal generatore per far fluire la corrente.

RI^2 è la potenza di Joule, la potenza necessaria per sostenere la corrente all'interno del circuito

$LI\frac{dI}{dt}$ è un termine di tipo autoinduttivo, legato alla presenza di un campo magnetico. Un circuito percorso da corrente

1.36.13

genera in uno spazio attorno al circuito un campo magnetico.
$LI\frac{dI}{dt}$ è interpretato come la potenza che il generatore spende per produrre il campo magnetico che è stabilito nelle regioni finitime al circuito. È interpretato come una energia magnetica per unità di tempo.
Allora possiamo scrivere $\frac{dU_B}{dt} = LI\frac{dI}{dt}$ e ridurre l'eq. fra derivate a eq. tra differenziali e integrare

$$\int_0^{U_B} dU_B = U_B = \int_0^{I} LI\,dI = \frac{1}{2}LI^2$$

L'energia del campo magnetico associato alla configurazione di corrente è $\frac{1}{2}LI^2$.

$$\underbrace{U_B}_{\text{energia magnetica}} = \frac{1}{2}LI^2$$ e vale per un circuito induttivo, è misurata in JOULE

quindi L non è trascurabile, in cui fluisce una corrente I che può essere sia dipendente dal tempo come stazionaria.
Se è stazionaria U_B è una energia magnetica stazionaria.
Se I dipende dal tempo l'energia magnetica U_B dipende dal tempo.

L'energia per unità di tempo (potenza) spesa dal generatore di corrente va in parte a mantenere la corrente e quindi a vincere la resistenza del circuito e in parte va a stabilire i stabilizzare il campo magnetico nelle vicinanze del circuito. AL CAMPO MAGNETICO È QUINDI ASSOCIABILE
L.36.14 UNA QUALCHE FORMA DI ENERGIA E CI SARÀ LA DENSITÀ DEL CAMPO MAGNETICO

LEZIONE 37

MUTUA INDUTTANZA; LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL

Prof. Paolo Allia
51'52''
Energia del campo magnetico
Mutua induzione
Forma differenziale della Legge di Faraday-Henry-Lenz
Legge di Ampère-Maxwell

Proseguimento dello studio dell'elettrodinamica, la scienza dei campi elettrici e magnetici dipendenti dal tempo.

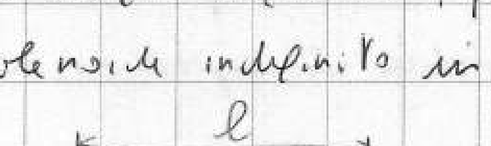
ENERGIA DEL CAMPO MAGNETICO

Energia associata ad un campo magnetico prodotto da una corrente che circola in un circuito.

(1) $$\underbrace{U_B}_{\text{Energia del campo magnetico}} = \frac{1}{2} \underbrace{L}_{\text{autoinduttanza}} \underbrace{I}_{\text{corrente nel circuito}}^{2}$$

ENERGIA ASSOCIATA MACROSCOPICAMENTE AL CAMPO MAGNETICO CHE VIENE A PRODURSI IN PROSSIMITÀ DEL CIRCUITO PERCORSO DA CORRENTE PER EFFETTO DELLA CORRENTE STESSA

A questa espressione macroscopica integrata sullo spazio è possibile associare una espressione microscopica puntuale quindi una densità di energia magnetica, per il calcolo della quale faremo uso del solenoide indefinito in cui si instaura un campo magnetico se percorso da una corrente.



nel tratto l ci saranno N spire; $n = \frac{N}{l}$

Il campo magnetico, uniforme, in ogni punto della sezione è B:

$$B = \mu_0 \cdot \underbrace{n}_{\text{n. spire per unità di lunghezza}} \cdot I$$

$$L = \mu_0 n^2 \underbrace{S}_{\text{sezione del solenoide, costante}} l$$ è il coefficiente di autoinduzione per unità di lunghezza

Calcoliamo l'energia magnetica relativa al tratto di circuito considerato, applicando la formula (1)

$$U_B = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 S l I^2 = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 \underbrace{S l}_{\text{Volume dello spazio delimitato dal solenoide}}$$

↳ energia magnetica

$$u_B = \frac{U_B}{S l} = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$$

↳ densità di energia magnetica

Vogliamo esprimere il risultato ottenuto in termini del campo B. Lo possiamo fare facilmente nel caso del solenoide poiché il campo B è lineare con la corrente secondo l'espressione $B = \mu_0 n I$. Quindi abbiamo

$$u_B = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{B^2}{\mu_0^2} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$ e questa è una densità di energia misurata in Joule / m^3,

è una energia magnetica per unità di volume espressa senza riferimento allo specifico circuito considerato; non compare la corrente del circuito, non compare l'autoinduttanza del circuito. Compare soltanto il campo magnetico associato al circuito, campo che è tutto interno al solenoide, all'esterno non c'è campo magnetico.

Quindi possiamo dire che dove è presente un campo magnetico B è presente una densità di energia magnetica di espressione u_B vista.

ENERGIA DEL CAMPO B

10'52''

$$U_B = \frac{1}{2\mu_0}\int_V B^2 \, dv$$

↳ volume dove è presente il campo B

permeabilità magnetica

Per analogia riportiamo la:

ENERGIA DEL CAMPO E

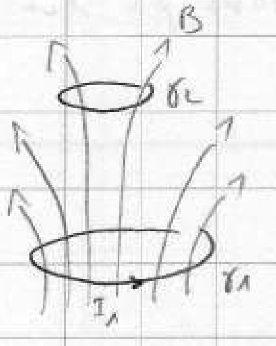
$$U_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_V E^2 \, dv$$

E può o non può essere dipendente dal tempo

↳ costante dielettrica nel vuoto

MUTUA INDUZIONE TRA DUE CIRCUITI

percorsi da correnti dipendenti dal tempo



$$\Phi_{2,1} = M \, I_1$$

↳ flusso di B attraverso il circuito 2 prodotto dal circuito 1

$$\Phi_{1,2} = M \, I_2$$

M è il coefficiente di mutua induzione tra due circuiti, o mutua induttanza.

$$M = \frac{\Phi_{2,1}}{I_1}$$

QUESTO RAPPORTO È DIPENDENTE DALLA MUTUA GEOMETRIA DEI DUE CIRCUITI, QUINDI DALLA FORMA, DALLA DISTANZA DEI DUE CIRCUITI

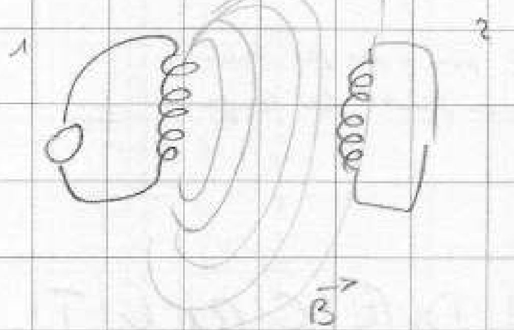
Esiste una forza elettromotrice di mutua induzione, che è

$$V_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

FORZA ELETTROMOTRICE DI MUTUA INDUZIONE

↳ nel 2° circuito

Questo fenomeno non è adatto per il trasferimento di informazione a lunga distanza



L'informazione della presenza del primo circuito è trasferita al secondo per il tramite del campo magnetico $\vec{B}$, in generale dipendente dal tempo.

Il campo $\vec{B}$ scende di intensità con la distanza rapidamente.
Ad una certa distanza i due circuiti non si sentono più l'uno con l'altro

---

FORMA DIFFERENZIALE della LEGGE DI FARADAY - HENRY - LENZ.

Ricordiamo la forma integrale: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B} \cdot \vec{u}_N \, dS$

derivata temporale

Questa legge ha valore in tutte le situazioni indipendentemente dalla presenza o meno di circuiti elettrici massivi in quanto tali. Vale anche per linee e superfici matematiche.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

FORMA DIFFERENZIALE

(derivata parziale)

$\vec{B}$ non statico

Da questo possiamo dire che il campo $\vec{E}$ di tipo dinamico, dipendente dal tempo non è più conservativo in senso stretto perché il suo rotore non è più identicamente nullo.
Possiamo anche dire che il campo $\vec{E}$ è generato non solo da

L.37.4

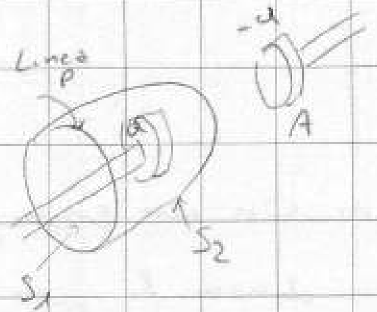
cariche ma è anche prodotto in tutte le regioni dello spazio dove esiste un campo magnetico $\vec{B}$ che varia nel tempo secondo la legge differenziale precedente. 29'25"

Ricordiamo la legge di Ampère

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

questa è una circolazione (di $\vec{B}$). Formula valida per correnti elettriche stazionarie

Dunque vediamo la legge di Ampère nel caso di campi (elettrico o magnetico) non stazionari.



35'45" In presenza di campi elettrici o magnetici dipendenti dal tempo il teorema di Ampère come sopra non è l'espressione corretta da seguire.
Secondo Maxwell il teorema di Ampère può essere modificato introducendo nel secondo termine qualcosa che tenga conto dell'esistenza di fenomeni dipendenti dal tempo.
Con considerazioni basate sul principio di conservazione della carica Maxwell fu in grado di proporre una espressione, rivelatasi corretta, per il termine aggiuntivo al secondo membro

dell'equazione di Ampère.
Accanto alla corrente circolante I, Maxwell introduce una corrente di spostamento I_S così definita:

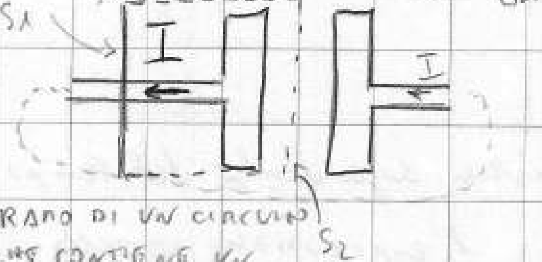
$$I_S = \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \underbrace{\int \vec{E} \cdot \vec{u}_N \, dS}_{}$$, corrente di spostamento

flusso del campo elettrico attraverso una superficie qualsiasi sottesa dalla linea chiusa lungo la quale viene calcolata la circuitazione del campo B.

Questo termine deriva da considerazioni profonde di simmetria e basate sul principio di conservazione della carica, che non era soddisfatto dalla legge di Ampère, che diventa quindi

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_S)$$

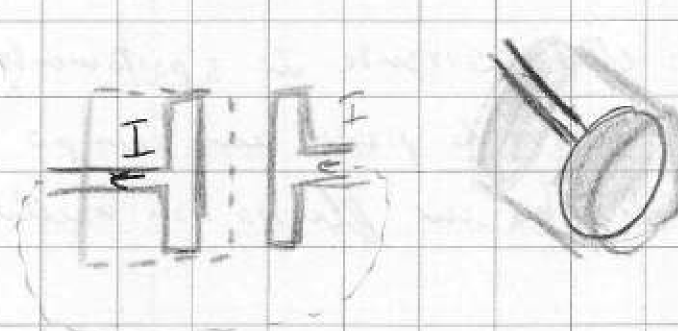
Dimostriamo la validità delle considerazioni con un esempio:



RAMO DI UN CIRCUITO CHE CONTIENE UN CONDENSATORE.

siamo in condizioni dinamiche, con un ramo di un circuito che contiene un condensatore e supponiamo che ad un certo istante ci sia una carica $+Q$ su una piastra del condensatore e $-Q$ sull'altra e supponiamo che il condensatore si stia scaricando, quindi vuol dire che c'è una corrente elettrica I che fluisce dalla piastra positiva verso la piastra negativa.
Sia S_1 una superficie piana che taglia il circuito e sia S_2 una superficie ad es. cilindrica come da figura.
Andiamo a calcolare il risultato come proposto da Maxwell

Ripetizione del disegno



per quanto concerne l'integrale sulla linea chiusa L di $\vec{B}$ in $d\vec{l}$:

$S_1 + S_2$ è un cilindro, una pastina, S_1 è il coperchio

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_s)$$

Andiamo a esaminare effettivamente che cosa avviene quando valutiamo i flussi che compaiono al secondo membro di questa equazione sull'una attraverso l'una e attraverso l'altra superficie.

S_1) È una superficie che è compresa all'interno della linea chiusa ed è perpendicolare al disegno e taglia il conduttore. Il flusso di una densità di corrente attraverso questa superficie è: $\mu_0 I$

Non esiste in questa regione di spazio un campo elettrico dipendente dal tempo il cui flusso sia valutabile attraverso la superficie S_1 e quindi il termine I_s attraverso la superficie S_1 è 0.

Dunque il flusso per S_1 è $\mu_0 I$.

S_2) Il flusso attraverso la superficie S_2, che è quanto resta della superficie laterale del cilindroide:

$I = 0$, non c'è flusso di corrente perché l'unica corrente è sul conduttore e non taglia la superficie S_2

L.37.7

in nessun punto.
C'è però un contributo legato alla corrente di spostamento, cioè al fatto che esiste nella regione fra le piastre un campo elettrico variabile nel tempo, che ha un flusso non nullo attraverso la superficie S_2.
Il flusso del campo elettrico è così calcolato:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$ campo elettrico, $\sigma = \frac{Q}{S}$, ove Q è la carica del condensatore divisa la superficie del condensatore.

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$, $\perp$ alla superficie S_2 di base e quindi il suo flusso ϕ_E è:

$$\phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Abbiamo

$$\frac{d\phi_E}{dt} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \overset{\frac{dQ}{dt}}{\overset{\shortparallel}{I}}$$

e quindi in questo caso abbiamo $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$.

Ricapitolando:

S_1) $\mu_0 I$; $I_S = 0$
S_2) $I = 0$; $\mu_0 I$

Il risultato è sempre lo stesso, che la superficie tagli o non tagli la corrente

Quindi la legge di Ampère va giustamente modificata introducendo un termine (I_S) dipendente dal tempo in cui compare il flusso del campo elettrico attraverso una certa superficie.

LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot \vec{u}_N \, dS + \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int \vec{E} \cdot \vec{u}_N \, dS}_{\text{TERMINE della corrente di spostamento}}$$

CIRCOLAZIONE DI B LUNGO UNA QUALSIASI LINEA CHIUSA

CORRENTE CHE ATTRAVERSA UNA QUALSIASI SUPERFICIE SOTTESA DALLA LINEA CHIUSA IN QUESTIONE

CORRENTE DI SPOSTAMENTO

Dunque un campo magnetico B viene generato da correnti ma è anche generato da campi elettrici variabili nel tempo. Questa è una relazione integrale, a cui è affiancabile una relazione differenziale, che sarà la quarta equazione di Maxwell che tengono conto espressamente degli effetti dinamici su campi elettrici e magnetici.

FORMA DIFFERENZIALE

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{per la dinamicità}}$$

prod. vett. dell'operatore vettoriale gradiente per il campo B.

$\operatorname{rot}\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$

QUESTA QUARTA EQUAZIONE CONTIENE LA DERIVATA TEMPORALE DEL CAMPO ELETTRICO ed è una derivata parziale perché il campo elettrico è funzione dello spazio e del tempo

Questa equazione è valida punto per punto nello spazio e possiamo dire che le sorgenti del campo B non sono solo correnti (stazionarie o no), ma anche variazioni di campo elettrico nello spazio.

Abbiamo visto che le due ultime equazioni di Maxwell, quelle che coinvolgono gli operatori rotore del campo B e del campo E si trasformano passando dallo stato stazionario a campi dipendenti dal tempo.
Le aggiunte contengono, già il rotore di E le variazioni di B nel tempo e l'aggiunta già il rotore di B contiene la variazione di E nel tempo in simmetria estremamente precisa.

L. 32.10